

Elektrotechnika 1 - počítačová cvičení

Garant předmětu:

doc. Ing. Jiří Sedláček, CSc.

Autoři textu:

doc. Ing. Jiří Sedláček, CSc.

doc. Ing. Milan Murina, CSc.

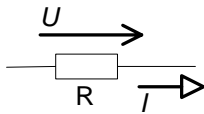
Ing. Miloslav Steinbauer, Ph.D.

Obsah

1	Základní zákony elektrických obvodů a jejich aplikace.....	3
2	Metoda zjednodušování obvodu.....	6
3	Metoda úměrných veličin	10
4	Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů	12
5	Metoda smyčkových proudů (MSP).....	13
6	Metoda uzlových napětí (MUN).....	18
7	Modifikovaná metoda uzlových napětí (MMUN).....	25
8	Metoda náhradního zdroje	27
9	Časově proměnné veličiny	30
10	Nelineární obvody	34
11	Magnetické obvody	43
	Příloha – BH charakteristiky	54

1 Základní zákony elektrických obvodů a jejich aplikace

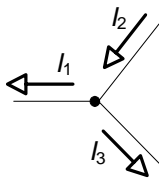
OHMŮV ZÁKON



$$U = R \cdot I$$

I. KIRCHHOFFŮV ZÁKON (PROUDOVÝ): $\sum_k I_k = 0$

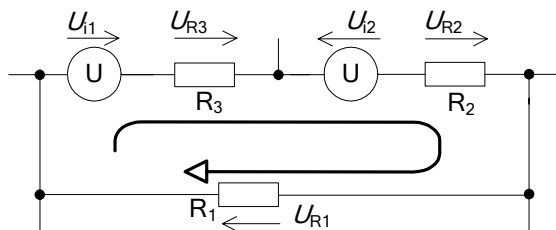
Proudy tekoucí z uzlu bereme s kladným znaménkem, proudy tekoucí do uzlu se záporným znaménkem.



$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

II. KIRCHHOFFŮV ZÁKON (NAPĚŤOVÝ): $\sum_k U_k = 0$

Napětí (úbytky na rezistorech, napětí zdrojů), jejichž čítací šipka má směr, souhlasící se směrem oběhu kolem smyčky, bereme s kladným znaménkem, ostatní napětí se záporným znaménkem.



$$U_{11} + U_{R3} - U_{12} + U_{R2} + U_{R1} = 0$$

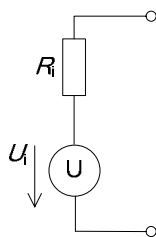
ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1.1

Napětí stejnosměrného zdroje naprázdno je 13 V. Při proudu 20 A je svorkové napětí 12 V. Vytvořte napěťový a proudový model tohoto reálného zdroje.

Řešení

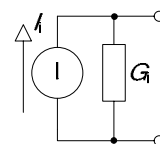
a) napěťový model



$$U_i = U_0 = 13 \text{ V}$$

$$R_i = \frac{U_0 - U}{I} = \frac{13 - 12}{20} = 0,05 \Omega$$

b) proudový model



$$G_i = \frac{1}{R_i} = 20 \text{ S}$$

$$I_i = \frac{U_i}{R_i} = 260 \text{ A}$$

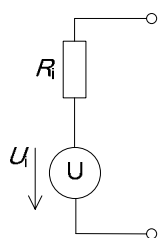
Příklad 1.2

Stejnoseměrný zdroj při připojení $R_1 = 68 \Omega$ dodává proud $I_1 = 0,15 \text{ A}$ a při $R_2 = 100 \Omega$ pak $I_2 = 0,106 \text{ A}$. Vytvořte napěťový a proudový model zdroje.

Řešení

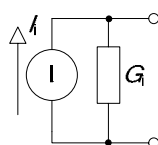
$$R_1 I_1 = U_i - R_i I_1, \quad R_2 I_2 = U_i - R_i I_2, \quad R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_i - R_i I_1 - U_i + R_i I_2$$

$$R_i = \frac{R_1 I_1 - R_2 I_2}{I_2 - I_1} = 9,091 \Omega \quad U_i = R_i I_1 + R_1 I_1 = 11,56 \text{ V}$$



$$R_i = 9,091 \Omega$$

$$U_i = 11,56 \text{ V}$$

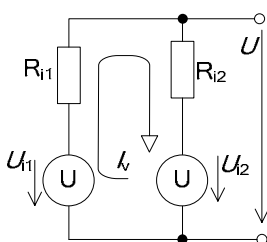


$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{9,091} = 0,11 \text{ S}$$

$$I_i = \frac{U_i}{R_i} = \frac{11,56}{9,091} = 1,272 \text{ A}$$

Příklad 1.3

Určete napětí U a proud I_V dvou paralelně řazených elektrických zdrojů (např. nový a starší chemický články).



$$U_{i1} = 1,6 \text{ V} \quad U_{i2} = 1,45 \text{ V}$$

$$R_{i1} = 0,8 \Omega \quad R_{i2} = 1,2 \Omega$$

Řešení

Aplikací II. K.z. na vyznačenou smyčku dostaneme $R_{i1} I_V + R_{i2} I_V + U_{i2} - U_{i1} = 0$.

Vypočteme proud smyčky $I_V = \frac{U_{i1} - U_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} = 0,075 \text{ A}$.

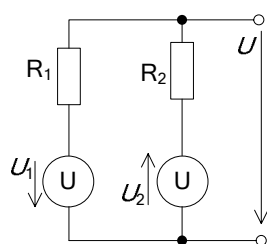
Výsledné napětí U je součtem napětí v jedné větvi $U = R_{i2} I_V + U_{i2} = 1,54 \text{ V}$.

Poznámka: Paralelně řazené články jsou naprázdno, přesto uvnitř baterie teče proud. Proto nelze spojovat nové a staré elektrické články paralelně.

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY**Příklad 1.4**

Určete napětí U :

- přepočtem napěťových zdrojů na proudové,
- aplikací základních zákonů elektrických obvodů.



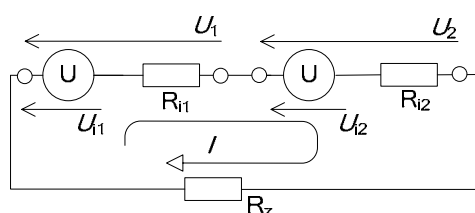
$$U_1 = 70 \text{ V} \quad U_2 = 50 \text{ V}$$

$$R_1 = 9 \Omega \quad R_2 = 15 \Omega$$

Výsledek: $U = \underline{25 \text{ V}}$

Příklad 1.5

Určete svorková napětí zdrojů U_1 a U_2 pro hodnotu zátěže a) $R_z = 5 \Omega$ a b) $R_z = 3 \Omega$.



$$U_{i1} = 1,6 \text{ V}$$

$$U_{i2} = 1,2 \text{ V}$$

$$R_{i1} = 0,8 \Omega$$

$$R_{i2} = 4 \Omega$$

a) **Výsledky:**

$$I = 0,2857 \text{ A}$$

$$U_1 = \underline{1,371 \text{ V}}, \quad U_2 = \underline{0,05714 \text{ V}}$$

b) **Výsledky:**

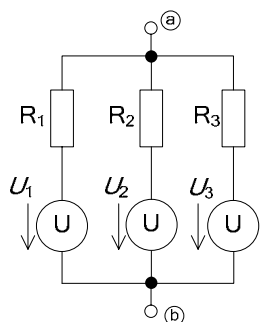
$$I = 0,359 \text{ A}$$

$$U_1 = \underline{1,313 \text{ V}}, \quad U_2 = \underline{-0,2359 \text{ V}}$$

Poznámka: Při vzájemném porovnání výsledků je vidět, že pro menší z hodnot R_z se otočí polarita svorkového napětí U_2 . To může nastat v baterii z nestejných elektrických článků.

Příklad 1.6

Určete hodnotu odporu R_3 tak, aby $U_{ab} = 20 \text{ V}$.



$$U_1 = 10 \text{ V}, \quad U_2 = 20 \text{ V}, \quad U_3 = 30 \text{ V}$$

$$R_1 = 5 \Omega, \quad R_2 = 10 \Omega$$

Nápověda: Přepočítejte zdroje na proudové a k řešení použijte I. K.z. pro uzel ①.

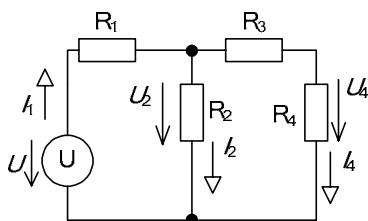
Výsledek: $R_3 = \underline{5 \Omega}$

2 Metoda zjednodušování obvodu

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 2.1

Určete U_4 metodou zjednodušování.



$$U = 10 \text{ V}, \quad R_1 = 20 \, \Omega, \\ R_2 = 100 \, \Omega, \quad R_3 = R_4 = 50 \, \Omega$$

Řešení:

Celkový odpor

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 50 + 50 = 100 \, \Omega \\ R_{234} = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} = 50 \, \Omega$$

Proud ze zdroje

$$R = R_1 + R_{234} = 20 + 50 = 70 \, \Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = 0,1429 \text{ A}$$

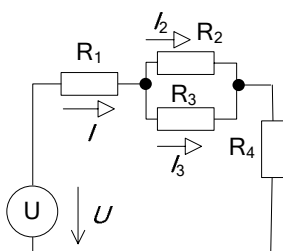
$$U_2 = U - R_1 I_1 = 7,143 \text{ V}$$

Hledané napětí

$$U_4 = U_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \underline{3,571 \text{ V}}$$

Příklad 2.2

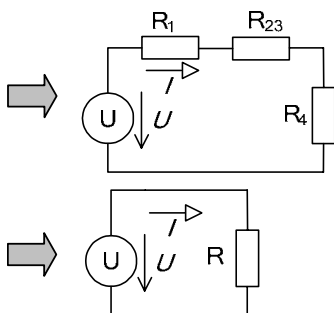
Vypočtete proudy I , I_2 , I_3 .



$$U = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \, \Omega$$

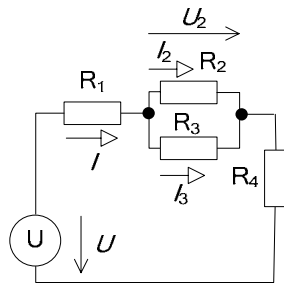
Řešení:



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \, \Omega$$

$$R = R_1 + R_{23} + R_4 = 25 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{20}{25} = \underline{0,8 \text{ A}}$$



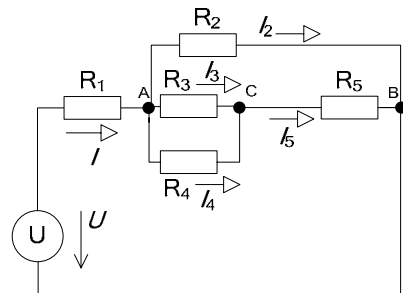
$$U_2 = I \cdot R_{23} = 0,8 \cdot 5 = 4 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4}{10} = \underline{0,4 \text{ A}}$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{4}{10} = \underline{0,4 \text{ A}}$$

Příklad 2.3

Vypočtete proudy I , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 .



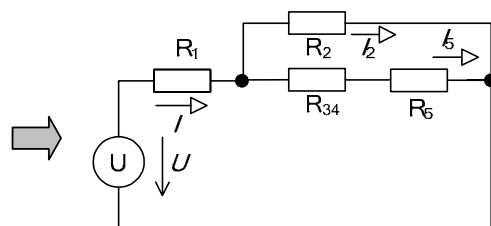
$$U = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

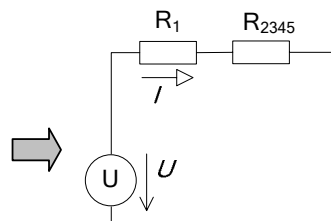
$$R_2 = 20 \Omega$$

$$R_5 = 15 \Omega$$

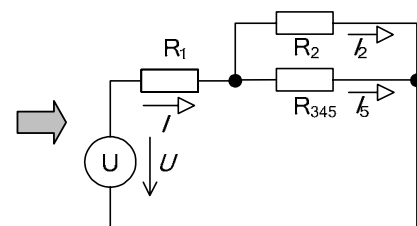
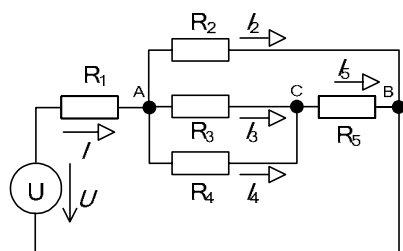
Řešení:



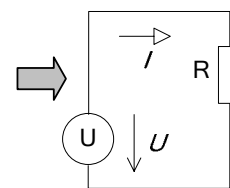
$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 5 \Omega$$



$$R_{2345} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}} = 10 \Omega$$



$$R_{345} = R_{34} + R_5 = 20 \Omega$$



$$R = R_1 + R_{2345} = 20 \Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{20}{20} = \underline{1 \text{ A}}$$

$$U_1 + U_{AB} - U = 0 \Rightarrow U_{AB} = U - U_1$$

$$U_{AB} = U - I \cdot R_1 = 10 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{10}{20} = \underline{0,5 \text{ A}}$$

$$I_5 + I_2 - I = 0 \Rightarrow I_5 = I - I_2 = \underline{0,5 \text{ A}}$$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_5 \Rightarrow U_{AC} = U_{AB} - U_5$$

$$U_{AC} = U_{AB} - I_5 R_5 = 2,5 \text{ V}$$

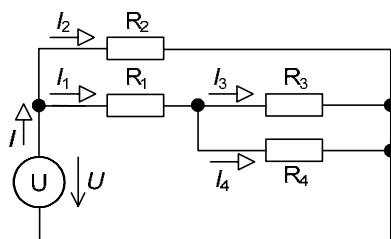
$$I_3 = \frac{U_{AC}}{R_3} = \frac{2,5}{10} = \underline{0,25 \text{ A}}$$

$$I_4 = \frac{U_{AC}}{R_4} = \frac{2,5}{10} = \underline{0,25 \text{ A}}$$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 2.4

Vypočtěte proudy I, I_1, I_2, I_3, I_4



$$U = 50 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

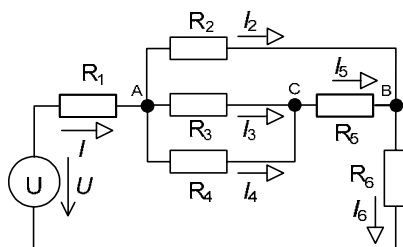
$$R_2 = R_3 = 20 \Omega$$

$$R_4 = 10 \Omega$$

Výsledky: $I = \underline{5,5 \text{ A}}, I_1 = \underline{3 \text{ A}}, I_2 = \underline{2,5 \text{ A}}, I_3 = \underline{1 \text{ A}}, I_4 = \underline{2 \text{ A}}$

Příklad 2.5

Vypočtěte proudy I, I_2, I_3, I_4, I_5



$$U = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_2 = R_3 = 20 \Omega$$

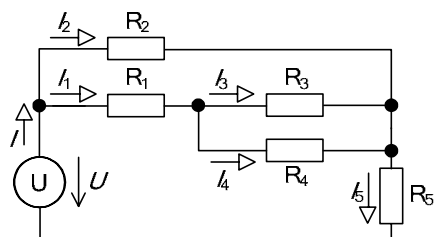
$$R_4 = 40 \Omega$$

$$R_5 = R_6 = 30 \Omega$$

Výsledky: $I = \underline{0,3725 \text{ A}}, I_2 = \underline{0,2549 \text{ A}}, I_3 = \underline{0,0784 \text{ A}}, I_4 = \underline{0,0392 \text{ A}}, I_5 = \underline{0,1176 \text{ A}}$

Příklad 2.6

Vypočtěte proudy $I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$



$$U = 30 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = 20 \Omega$$

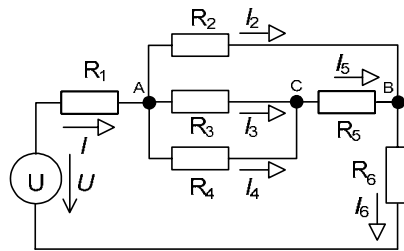
$$R_2 = 10 \Omega$$

$$R_4 = 40 \Omega$$

Výsledky: $I = I_5 = \underline{1,083 \text{ A}}, I_1 = \underline{0,83 \text{ A}}, I_2 = \underline{0,25 \text{ A}}, I_3 = \underline{0,16 \text{ A}}, I_4 = \underline{0,083 \text{ A}}$

Příklad 2.7

Vypočtete proudy I , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6



$$U = 50 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \, \Omega, R_2 = 20 \, \Omega$$

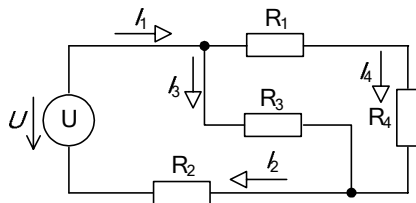
$$R_3 = 30 \, \Omega, R_4 = 40 \, \Omega$$

$$R_5 = 50 \, \Omega, R_6 = 60 \, \Omega$$

Výsledky: $I = I_6 = \underline{0,585 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{0,451 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{0,0767 \text{ A}}$, $I_4 = \underline{0,0576 \text{ A}}$, $I_5 = \underline{0,134 \text{ A}}$

Příklad 2.8

Určete všechny proudy v obvodu.



$$U = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

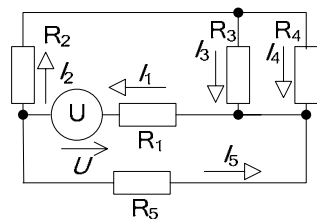
$$R_2 = 13 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 2 \text{ k}\Omega$$

Výsledky: $I_1 = I_2 = \underline{0,6723 \text{ mA}}$, $I_3 = \underline{0,4213 \text{ mA}}$, $I_4 = \underline{0,2528 \text{ mA}}$

Příklad 2.9

Určete všechny proudy obvodu.



$$U = 48 \text{ V}, R_1 = 2 \, \Omega$$

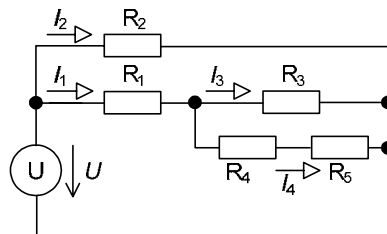
$$R_2 = 30 \, \Omega, R_3 = 40 \, \Omega$$

$$R_4 = 10 \, \Omega, R_5 = 20 \, \Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{3,178 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{1,096 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{0,219 \text{ A}}$, $I_4 = \underline{0,877 \text{ A}}$, $I_5 = \underline{2,082 \text{ A}}$

Příklad 2.10

Vypočtete proudy I_1 , I_2 , I_3 , I_4 .



$$U = 50 \text{ V}, R_1 = R_4 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 60 \, \Omega, R_3 = 20 \, \Omega$$

$$R_5 = 30 \, \Omega$$

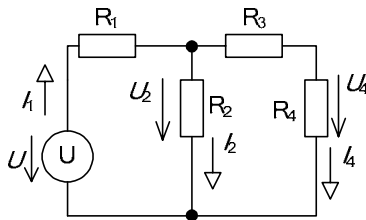
Výsledky: $I_1 = \underline{2,143 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{0,8333 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{1,429 \text{ A}}$, $I_4 = \underline{0,7143 \text{ A}}$

3 Metoda úměrných veličin

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 3.1

Určete napětí U_4 metodou úměrných veličin.



$$U = 10 \text{ V}, \quad R_1 = 20 \, \Omega, \\ R_2 = 100 \, \Omega, \quad R_3 = R_4 = 50 \, \Omega$$

Řešení:

Volíme $U'_4 = 50 \text{ V}$ a vypočteme

$$I'_4 = \frac{U'_4}{R_4} = 1 \text{ A}, \quad U'_2 = (R_3 + R_4) I'_4 = 100 \text{ V}$$

$$I'_2 = \frac{U'_2}{R_2} = 1 \text{ A}, \quad I_1 = I'_2 + I'_4 = 2 \text{ A}$$

$$U' = U'_2 + R_1 I'_1 = 140 \text{ V}$$

$$k = \frac{U}{U'} = 0,07143$$

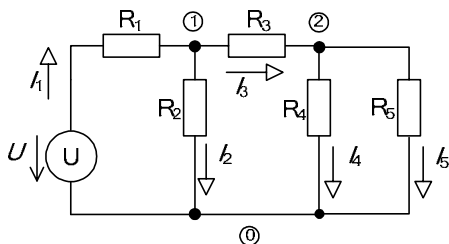
$$U_4 = k U'_4 = \underline{3,571 \text{ V}}$$

Koeficient úměrnosti

Hledané napětí

Příklad 3.2

Určete proudy obvodu: a) metodou zjednodušování, b) metodou úměrných veličin.



$$U = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 13 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 4 \text{ k}\Omega$$

Řešení: a) metodou zjednodušování:

$$R_{20} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 1,333 \text{ k}\Omega$$

$$R_{10} = \frac{R_2 (R_3 + R_{20})}{R_2 + R_3 + R_{20}} = 3,25 \text{ k}\Omega$$

$$R = R_1 + R_{10} = 6,25 \text{ k}\Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = 1,6 \text{ mA}$$

$$U_{10} = U - R_1 I_1 = 5,2 \text{ V}$$

b) metodou úměrných veličin:

$$\text{Volíme } I'_5 = 1 \text{ mA.}$$

$$U'_{20} = R_5 I'_5 = 4 \text{ V}$$

$$I'_4 = \frac{U'_{20}}{R_4} = 2 \text{ mA}$$

$$I'_3 = I'_4 + I'_5 = 3 \text{ mA}$$

$$U'_{10} = U'_{20} + R_3 I'_3 = 13 \text{ V}$$

$$I'_2 = \frac{U'_{10}}{R_2} = 1 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{U_{10}}{R_2} = \underline{0,4 \text{ mA}}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = \underline{1,2 \text{ mA}}$$

$$U_{20} = U_{10} - R_3 I_3 = \underline{1,6 \text{ V}}$$

$$I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \underline{0,8 \text{ mA}}$$

$$I_5 = \frac{U_{20}}{R_5} = \underline{0,4 \text{ mA}}$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 4 \text{ mA}$$

$$U' = U'_{10} + R_1 I'_1 = 25 \text{ V}$$

$$k = \frac{U}{U'} = 0,4$$

$$I_1 = k I'_1 = \underline{1,6 \text{ mA}}, I_2 = k I'_2 = \underline{0,4 \text{ mA}}$$

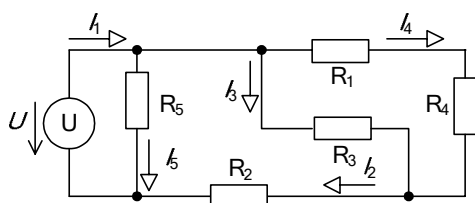
$$I_3 = k I'_3 = \underline{1,2 \text{ mA}}, I_4 = k I'_4 = \underline{0,8 \text{ mA}}$$

$$I_5 = k I'_5 = \underline{0,4 \text{ mA}}$$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 3.3

Určete proudy obvodu: a) metodou zjednodušování, b) metodou úměrných veličin.



$$U = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 13 \text{ k}\Omega$$

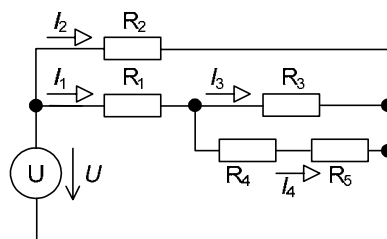
$$R_4 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{1,672 \text{ mA}}, I_2 = \underline{0,672 \text{ mA}}, I_3 = \underline{0,4202 \text{ mA}}, I_4 = \underline{0,2510 \text{ mA}}, I_5 = \underline{1,000 \text{ mA}}$

Příklad 3.4

Vypočtěte proudy I_1, I_2, I_3, I_4 .



$$U = 50 \text{ V}, R_1 = R_4 = 10 \Omega$$

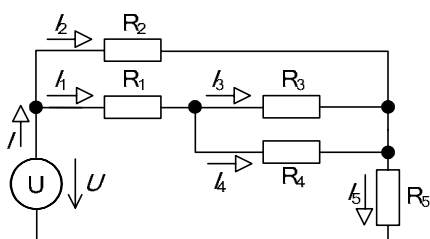
$$R_2 = 60 \Omega, R_3 = 20 \Omega$$

$$R_5 = 30 \Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{2,143 \text{ A}}, I_2 = \underline{0,83 \text{ A}}, I_3 = \underline{1,429 \text{ A}}, I_4 = \underline{0,7143 \text{ A}}$

Příklad 3.5

Vypočtěte proudy $I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$.



$$U = 30 \text{ V}$$

$$R_1 = R_4 = R_5 = 20 \Omega$$

$$R_2 = 40 \Omega, R_3 = 10 \Omega$$

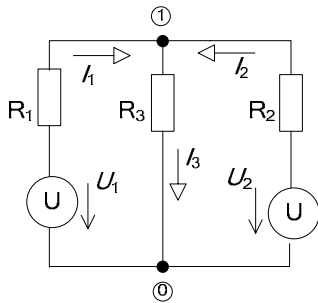
Výsledky: $I = I_5 = \underline{0,83 \text{ A}}, I_1 = \underline{0,5 \text{ A}}, I_2 = \underline{0,3 \text{ A}}, I_3 = \underline{0,3 \text{ A}}, I_4 = \underline{0,16 \text{ A}}$

4 Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 4.1

Obvod řešte aplikací Kirchhoffových zákonů.



$$R_1 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 20 \, \Omega$$

$$R_3 = 15 \, \Omega$$

$$U_1 = 6 \, \text{V}$$

$$U_2 = 18 \, \text{V}$$

Řešení:

I. K.z.: pro uzel 1

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

II. K.z.:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_1 = 0$$

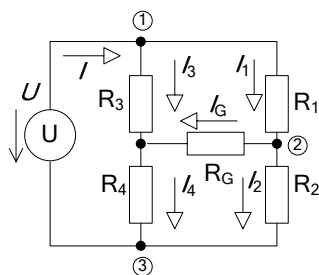
$$R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & 15 \\ 0 & 20 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} I_1 &= \underline{-0,09231 \, \text{A}} \\ I_2 &= \underline{0,5538 \, \text{A}} \\ I_3 &= \underline{0,4615 \, \text{A}} \end{aligned}$$

Příklad 4.2

Obvod popište pomocí K.z.



Řešení:

Nezávislé uzly $n = 3$, I. K.z.:

$$1: -I + I_1 + I_3 = 0$$

$$2: -I_1 + I_2 + I_G = 0$$

$$3: -I_2 - I_4 + I = 0$$

Nezávislé smyčky $s = 3$, II. K.z.:

$$R_1 I_1 + R_G I_G - R_3 I_3 = 0$$

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_G I_G = 0$$

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 - U = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & R_G & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_G & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_G \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}$$

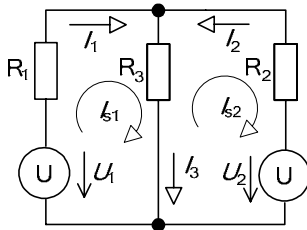
Popis obvodu pomocí K.z. vede na velké množství rovnic, proto se častěji používá metoda smyčkových proudů nebo metoda uzlových napětí.

5 Metoda smyčkových proudů (MSP)

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 5.1

Metodou smyčkových proudů určete proudy v obvodu.



$$\begin{aligned} U_1 &= 6 \text{ V}, U_2 = 18 \text{ V} \\ R_1 &= 10 \, \Omega, R_2 = 20 \, \Omega \\ R_3 &= 15 \, \Omega \end{aligned}$$

Řešení:

Pro smyčky můžeme podle II. K.z napsat:

$$\begin{aligned} \text{S1: } R_1 I_{s1} + R_3 (I_{s1} - I_{s2}) - U_1 &= 0 & (R_1 + R_3) I_{s1} - R_3 I_{s2} &= U_1 \\ \text{S2: } R_2 I_{s2} + R_3 (I_{s2} - I_{s1}) + U_2 &= 0 & -R_3 I_{s1} + (R_2 + R_3) I_{s2} &= -U_2 \end{aligned}$$

V maticovém zápisu:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Pomocí Cramerova pravidla $\Delta = \begin{vmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 35 \end{vmatrix} = 650$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -15 \\ -18 & 35 \end{vmatrix} = -60 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 25 & 6 \\ -15 & -18 \end{vmatrix} = -360$$

$$I_{s1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-60}{650} = -0,09231 \text{ A} \quad I_{s2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-360}{650} = -0,5538 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{s1} = \underline{-0,09231 \text{ A}} \quad I_2 = -I_{s2} = \underline{0,5538 \text{ A}}$$

$$I_3 = I_{s1} - I_{s2} = -0,09231 + 0,5538 = \underline{0,4615 \text{ A}}$$

Poznámka:

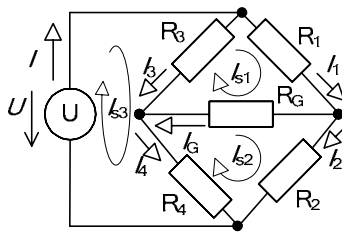
Soustavu rovnic pro MSP lze zapsat přímo v maticovém tvaru: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_s = \mathbf{U}$.

Prvky hlavní diagonály odporové matice jsou dány součtem rezistorů příslušné smyčky. Při volbě smyček jako ok sítě a souhlasném smyslu smyčkových proudů jsou ostatní prvky matice \mathbf{R} tvořeny záporně vzatou hodnotou rezistorů společných větví.

Prvky vektoru zdrojů napětí \mathbf{U} jsou dány součtem napětí zdrojů v příslušné smyčce s respektováním znaménka (+ pro nesouhlasnou orientaci napěťové šipky vzhledem ke smyčkovému proudu, - pro souhlasnou orientaci napětí a smyčkového proudu).

Příklad 5.2

Pomocí MSP určete proudy v obvodu.



$$\begin{aligned}
 U &= 2 \text{ V} \\
 R_1 &= R_3 = 20 \, \Omega \\
 R_2 &= 40 \, \Omega, R_4 = 10 \, \Omega \\
 R_G &= 25 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_G + R_3 & -R_G & -R_3 \\ -R_G & R_2 + R_4 + R_G & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 65 & -25 & -20 \\ -25 & 75 & -10 \\ -20 & -10 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$I_{s1} = 0,04321 \text{ A}, \quad I_{s2} = 0,0284 \text{ A}, \quad I_{s3} = 0,1049 \text{ A}$$

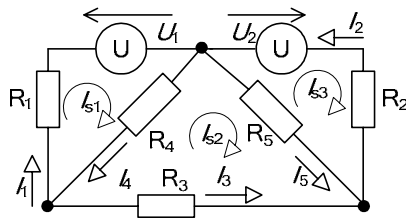
$$I_1 = I_{s1} = 0,04321 \text{ A}, \quad I_2 = I_{s2} = 0,0284 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{s3} - I_{s1} = 0,06169 \text{ A}, \quad I_4 = I_{s3} - I_{s2} = 0,0765 \text{ A}$$

$$I = I_{s3} = 0,1049 \text{ A}, \quad I_G = I_{s1} - I_{s2} = 0,01481 \text{ A}$$

Příklad 5.3

Určete proudy obvodu v pomoci MSP.



$$\begin{aligned}
 U_1 &= 5 \text{ V}, \quad U_2 = 7 \text{ V} \\
 R_1 &= 7,5 \, \Omega, \quad R_2 = 2,5 \, \Omega \\
 R_3 &= 5 \, \Omega, \quad R_4 = 2 \, \Omega \\
 R_5 &= 25 \, \Omega
 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_2 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9,5 & -2 & 0 \\ -2 & 32 & -25 \\ 0 & -25 & 27,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ I_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$I_{s1} = 0,4 \text{ A}, \quad I_{s2} = -0,6 \text{ A}, \quad I_{s3} = -0,8 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{s1} = 0,4 \text{ A}, \quad I_2 = I_{s3} = 0,8 \text{ A}, \quad I_3 = -I_{s2} = 0,6 \text{ A}$$

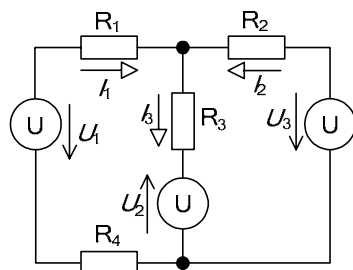
$$I_4 = I_{s1} - I_{s2} = 1 \text{ A}, \quad I_5 = I_{s2} - I_{s3} = 0,2 \text{ A}$$

$$(\text{Zkouška : } I_2 = I_3 + I_5 = 0,8 \text{ A})$$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 5.4

Metodou smyčkových proudů vypočtete proudy I_1 , I_2 , I_3 .



$$U_1 = 10 \text{ V}, U_2 = 20 \text{ V}, U_3 = 30 \text{ V}$$

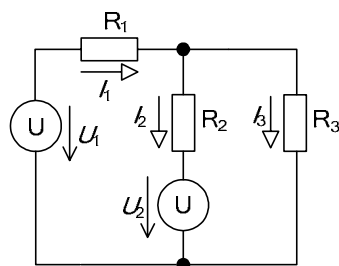
$$R_1 = R_4 = 10 \Omega$$

$$R_2 = R_3 = 20 \Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{0,16 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{1,16 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{1,3 \text{ A}}$

Příklad 5.5

Metodou smyčkových proudů vypočtete proudy I_1 , I_2 , I_3 .



$$U_1 = 10 \text{ V}$$

$$U_2 = 30 \text{ V}$$

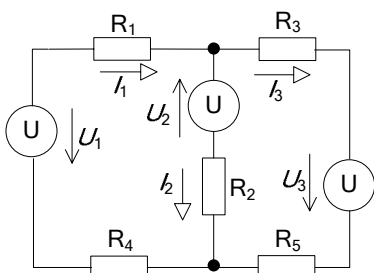
$$R_1 = R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 20 \Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{-0,6 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{-1,4 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{0,8 \text{ A}}$

Příklad 5.6

Metodou smyčkových proudů vypočtete proudy I_1 , I_2 , I_3 .



$$U_1 = 10 \text{ V}, U_2 = 30 \text{ V}$$

$$U_3 = 20 \text{ V}$$

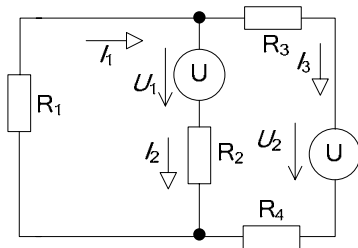
$$R_1 = R_4 = R_5 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega, R_3 = 30 \Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{-0,7 \text{ A}}$, $I_2 = \underline{1,3 \text{ A}}$, $I_3 = \underline{-0,6 \text{ A}}$

Příklad 5.7

Metodou smyčkových proudů vypočítejte proudy I_1, I_2, I_3 .

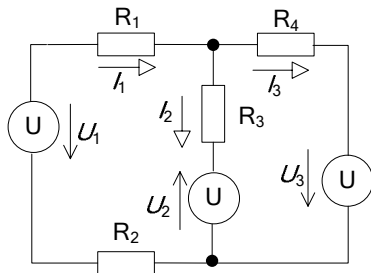


$$\begin{aligned} U_1 &= 20 \text{ V}, \quad U_2 = 30 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = R_4 = 10 \, \Omega \\ R_3 &= 20 \, \Omega \end{aligned}$$

Výsledky: $I_1 = -1,286 \text{ A}$, $I_2 = -0,714 \text{ A}$, $I_3 = -0,571 \text{ A}$

Příklad 5.8

Metodou smyčkových proudů vypočítejte proudy I_1, I_2, I_3 .

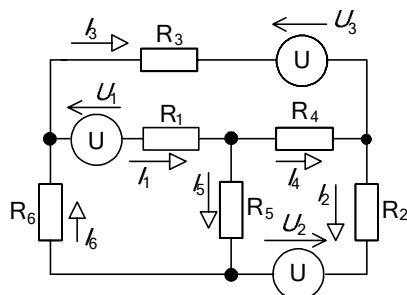


$$\begin{aligned} U_1 &= 30 \text{ V} \\ U_2 &= 20 \text{ V} \\ U_3 &= 40 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = 10 \, \Omega \\ R_3 &= R_4 = 20 \, \Omega \end{aligned}$$

Výsledky: $I_1 = 0,6 \text{ A}$, $I_2 = 1,83 \text{ A}$, $I_3 = -1,16 \text{ A}$

Příklad 5.9

Určete proudy v obvodu pomocí MSP.

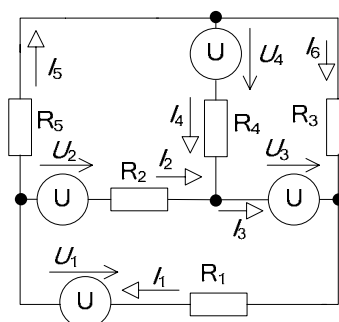


$$\begin{aligned} U_1 &= 110 \text{ V}, \quad U_2 = 15 \text{ V}, \quad U_3 = 90 \text{ V} \\ R_1 &= 500 \, \Omega, \quad R_2 = 300 \, \Omega, \quad R_3 = 500 \, \Omega \\ R_4 &= 1000 \, \Omega, \quad R_5 = 200 \, \Omega, \quad R_6 = 700 \, \Omega \end{aligned}$$

Výsledky: $I_1 = 0,06 \text{ A}$, $I_2 = 0,05 \text{ A}$, $I_3 = 0,04 \text{ A}$, $I_4 = 0,01 \text{ A}$, $I_5 = 0,05 \text{ A}$, $I_6 = 0,1 \text{ A}$

Příklad 5.10

Metodou smyčkových proudů určete jednotlivé proudy ve větvích obvodu.

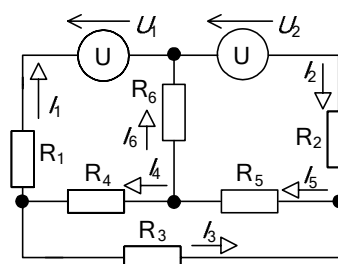


$$\begin{aligned} U_1 &= 100 \text{ V}, U_2 = 30 \text{ V} \\ U_3 &= 10 \text{ V}, U_4 = 6 \text{ V} \\ R_1 &= R_2 = 10 \Omega, R_3 = 15 \Omega \\ R_4 &= 6 \Omega, R_5 = 5 \Omega \end{aligned}$$

Výsledky: $I_1 = 5,05 \text{ A}$, $I_2 = 0,95 \text{ A}$, $I_3 = 3,117 \text{ A}$, $I_4 = 2,166 \text{ A}$, $I_5 = 4,1 \text{ A}$, $I_6 = 1,933 \text{ A}$

Příklad 5.11

Metodou smyčkových proudů určete proudy obvodu a také výkony dodávané zdroji a spotřebované rezistory.



$$\begin{aligned} U_1 &= 8 \text{ V}, U_2 = 8 \text{ V} \\ R_1 &= 22 \Omega, R_2 = 5 \Omega, R_3 = 16 \Omega \\ R_4 &= 15 \Omega, R_5 = 9 \Omega, R_6 = 14 \Omega \end{aligned}$$

Výsledky:

$$I_1 = 0,3956 \text{ A}, I_2 = 0,5726 \text{ A}, I_3 = -0,2772 \text{ A}, I_4 = 0,1184 \text{ A}, I_5 = 0,2954 \text{ A}, I_6 = 0,177 \text{ A}$$

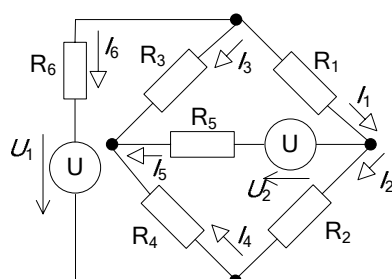
$$P_{R1} = R_1 I_1^2 = 3,443 \text{ W} \quad P_{R2} = R_2 I_2^2 = 1,639 \text{ W} \quad P_{R3} = R_3 I_3^2 = 1,229 \text{ W}$$

$$P_{R4} = R_4 I_4^2 = 0,2103 \text{ W} \quad P_{R5} = R_5 I_5^2 = 0,7854 \text{ W} \quad P_{R6} = R_6 I_6^2 = 0,4386 \text{ W} \quad \sum P_R = 7,745 \text{ W}$$

$$P_1 = U_1 I_1 = 3,165 \text{ W}, P_2 = U_2 I_2 = 4,581 \text{ W}, \quad \sum P = 7,746 \text{ W} \quad \sum P = \sum P_R$$

Příklad 5.12

Metodou smyčkových proudů určete proudy v obvodu.



$$\begin{aligned} U_1 &= 11 \text{ V}, U_2 = 35 \text{ V} \\ R_1 &= 5 \text{ k}\Omega, R_2 = 3 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 2 \text{ k}\Omega, R_4 = 5 \text{ k}\Omega \\ R_5 &= 1 \text{ k}\Omega, R_6 = 0,5 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Výsledky:

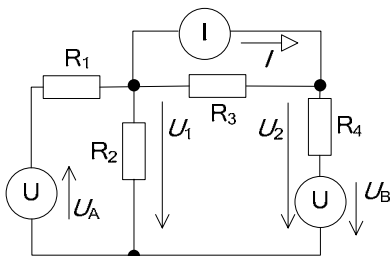
$$I_1 = -2,25 \text{ mA}, I_2 = 6,54 \text{ mA}, I_3 = -7,48 \text{ mA}, I_4 = 1,31 \text{ mA}, I_5 = -8,79 \text{ mA}, I_6 = -5,23 \text{ mA}$$

6 Metoda uzlových napětí (MUN)

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 6.1

Určete napětí U_1 a U_2 pomocí metody uzlových napětí.



$$U_A = 20 \text{ V}, \quad U_B = 15 \text{ V}$$

$$I = 1,5 \text{ A}$$

$$R_1 = R_2 = 20 \, \Omega$$

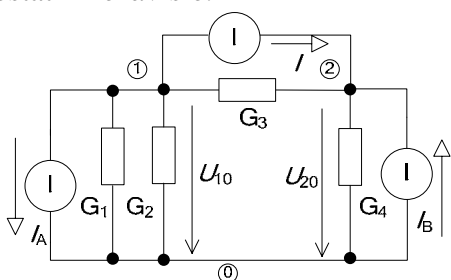
$$R_3 = R_4 = 40 \, \Omega$$

Řešení:

Nejprve je nutno přepočítat zdroje napětí na zdroje proudu a odpory na vodivosti:

$$I_A = \frac{U_A}{R_1} = 1 \text{ A}, \quad I_B = \frac{U_B}{R_4} = 0,375 \text{ A}, \quad G_1 = G_2 = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ S}, \quad G_3 = G_4 = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ S}$$

Očíslujeme uzly, jeden (označený obvykle číslem 0) je referenční, ostatní nezávislé.



Pro uzly můžeme podle I. K. z. napsat:

$$1: (G_1 + G_2)U_{10} + G_3(U_{10} - U_{20}) + I + I_A = 0$$

$$2: G_4U_{20} - G_3(U_{10} - U_{20}) - I - I_B = 0$$

$$(G_1 + G_2 + G_3)U_{10} - G_3U_{20} = -I - I_A$$

$$-G_3U_{10} + (G_3 + G_4)U_{20} = I + I_B$$

V maticovém zápisu:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I - I_A \\ I + I_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,125 & -0,025 \\ -0,025 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 \\ 1,875 \end{bmatrix}$$

Pomocí Cramerova pravidla určíme uzlová napětí:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,125 & -0,025 \\ -0,025 & 0,05 \end{vmatrix} = 5,625 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2,5 & -0,025 \\ 1,875 & 0,05 \end{vmatrix} = -0,078125$$

$$U_1 = U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -13,8 \text{ V}$$

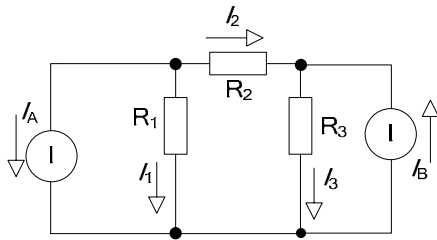
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,125 & -2,5 \\ -0,025 & 1,875 \end{vmatrix} = 0,171875$$

$$U_2 = U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 30,5 \text{ V}$$

Poznámka: Soustavu rovnic pro MUN lze zapsat přímo v maticovém tvaru: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$. Prvky hlavní diagonály vodivostní matice jsou dány součtem vodivostí připojených do příslušného uzlu. Ostatní prvky matice \mathbf{G} jsou tvořeny záporně vzatou hodnotou vodivostí spojujících mezi příslušnými uzly.

Příklad 6.2

Metodou uzlových napětí vypočítejte proudy I_1, I_2, I_3 .



$$I_A = 1 \text{ A}$$

$$I_B = 2 \text{ A}$$

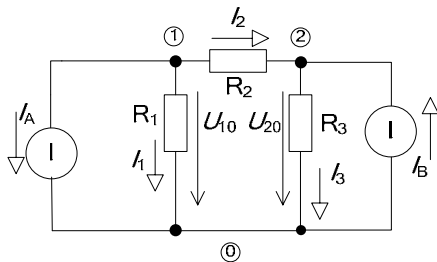
$$R_1 = R_3 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 20 \, \Omega$$

$$G_1 = G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,1 \, \Omega$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,05 \, \Omega$$

Řešení:



$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_A \\ I_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,15 & -0,05 \\ -0,05 & 0,15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0,15 & -0,05 \\ -0,05 & 0,15 \end{vmatrix} = 0,05$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} -I_A & -G_2 \\ I_B & G_2 + G_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -0,05 \\ 2 & 0,15 \end{vmatrix} = -0,05$$

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,05}{0,02} = -2,5 \text{ V}$$

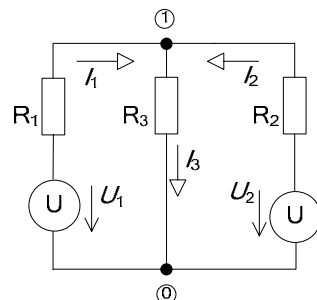
$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -I_A \\ -G_2 & I_B \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0,15 & -1 \\ -0,05 & 2 \end{vmatrix} = 0,25$$

$$U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0,25}{0,02} = 12,5 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_{10}}{R_1} = -\frac{2,5}{10} = -0,25 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_2} = \frac{-15}{20} = -0,75 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{20}}{R_3} = \frac{12,5}{10} = 1,25 \text{ A}.$$

Příklad 6.3

Pomocí metody uzlových napětí určete proudy I_1, I_2, I_3 v obvodu.

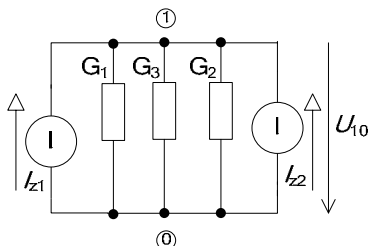


$$U_1 = 6 \text{ V}, \quad U_2 = 18 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \, \Omega, \quad R_2 = 20 \, \Omega$$

$$R_3 = 15 \, \Omega$$

Řešení:



$$G_1 = 0,1 \text{ S}, \quad G_2 = 0,05 \text{ S}, \quad G_3 = 0,06 \text{ S}$$

$$I_{z1} = \frac{U_1}{R_1} = 0,6 \text{ A}, \quad I_{z2} = \frac{U_2}{R_2} = 0,9 \text{ A}$$

Sestavíme rovnici pro uzel 1:

$$-I_{z1} - I_{z2} + G_1 U_{10} + G_2 U_{10} + G_3 U_{10} = 0$$

$$U_{10} = \frac{I_{z1} + I_{z2}}{G_1 + G_2 + G_3} = 6,923 \text{ V}$$

Pozor – proudy I_1, I_2 je nutno určit z původního obvodu!

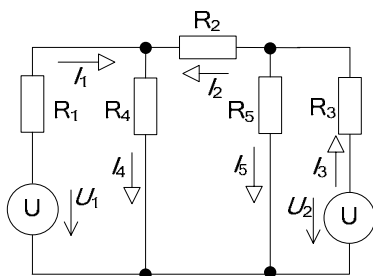
$$I_1 = I_{z1} - G_1 U_{10} = \underline{-0,0923 \text{ A}}$$

$$I_2 = I_{z2} - G_2 U_{10} = \underline{0,5539 \text{ A}}$$

$$I_3 = G_3 U_{10} = \underline{0,4616 \text{ A}}$$

Příklad 6.4

Určete proudy větví obvodu pomocí MUN.

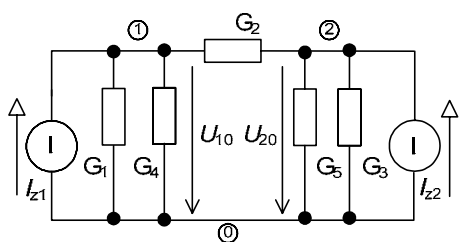


$$U_1 = 5 \text{ V}, U_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 2 \text{ k}\Omega, R_3 = 5 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 3 \text{ k}\Omega, R_5 = 1 \text{ k}\Omega$$

Řešení:



Nejprve je nutno přepočítat zdroje napětí na zdroje proudů:

$$I_{z1} = \frac{U_1}{R_1} = 2,5 \text{ mA}, \quad I_{z2} = \frac{U_2}{R_3} = 2 \text{ mA}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,3 \cdot 10^{-3} & -5 \cdot 10^{-4} \\ -5 \cdot 10^{-4} & 1,7 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \cdot 10^{-3} \\ 2 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,3 \cdot 10^{-3} & -5 \cdot 10^{-4} \\ -5 \cdot 10^{-4} & 1,7 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = 2,016 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2,5 \cdot 10^{-3} & -5 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-3} & 1,7 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = 5,25 \cdot 10^{-6} \quad U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \underline{2,6033 \text{ V}}$$

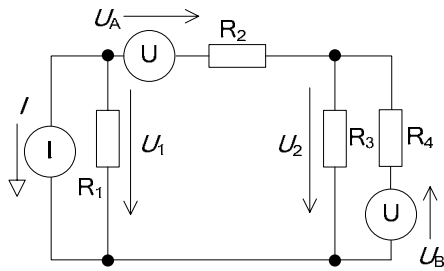
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1,3 \cdot 10^{-3} & 2,5 \cdot 10^{-3} \\ -5 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix} = 3,916 \cdot 10^{-6} \quad U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \underline{1,9421 \text{ V}}$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{10}}{R_1} = \underline{1,198 \text{ mA}}, \quad I_2 = \frac{U_{20} - U_{10}}{R_2} = \underline{0,3306 \text{ mA}}, \quad I_3 = \frac{U_2 - U_{20}}{R_3} = \underline{1,612 \text{ mA}}$$

$$I_4 = \frac{U_{10}}{R_4} = \underline{0,8678 \text{ mA}}, \quad I_5 = \frac{U_{20}}{R_5} = \underline{1,942 \text{ mA}}$$

Příklad 6.5

Určete napětí U_1 a U_2 pomocí MUN.



$$U_A = 20 \text{ V}, \quad U_B = 15 \text{ V}$$

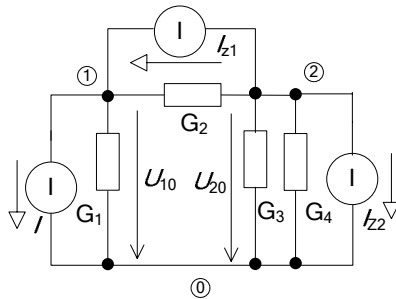
$$I = 1,5 \text{ A}$$

$$R_1 = R_2 = 20 \, \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 40 \, \Omega$$

Řešení: Přepočít na proudové zdroje a výpočet vodivostí:

$$I_{z1} = \frac{U_A}{R_2} = 1 \text{ A}, \quad I_{z2} = \frac{U_B}{R_4} = 0,375 \text{ A}, \quad G_1 = G_2 = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ S}, \quad G_3 = G_4 = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ S}$$



$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} - I \\ -I_{z1} - I_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,1 & -0,05 \\ -0,05 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,1 & -0,05 \\ -0,05 & 0,1 \end{vmatrix} = 0,0075$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0,5 & -0,05 \\ -1,375 & 0,1 \end{vmatrix} = -0,11875$$

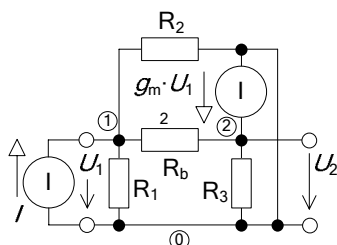
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,1 & -0,5 \\ -0,05 & -1,375 \end{vmatrix} = -0,1625$$

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,11875}{0,0075} = -15,8\bar{3} \text{ V}$$

$$U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-0,1625}{0,0075} = -21,6\bar{6} \text{ V}$$

Příklad 6.6

Metodou uzlových napětí určete napěťový přenos K_U a vstupní odpor R_{vst} lineárního dvojbranu obsahujícího zdroj proudu řízený napětím (ZPŘN).



$$R_1 = 5 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 50 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 1 \text{ k}\Omega,$$

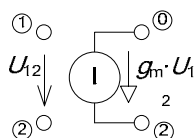
$$R_b = 5 \text{ k}\Omega, \quad g_m = 100 \text{ mS}$$

Matice MUN s doplněným razítkem ZPŘN:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_b & -G_b \\ -G_b - g_m & G_b + G_3 + g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Řešení:

Razítko ZPŘN:



$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ 0 & \begin{bmatrix} g_m & -g_m \\ -g_m & g_m \end{bmatrix} \\ 2 & \end{matrix}$$

Pozor – pravou stranu rovnice tvoří pouze nezávislé zdroje.

$$\begin{bmatrix} 0,42 \cdot 10^{-3} & -0,2 \cdot 10^{-3} \\ -0,1002 & 0,1012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Napětový přenos a vstupní odpor:

$$K_U = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{\Delta_2 / \Delta}{\Delta_1 / \Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{0,1002 \cdot I}{0,1012 \cdot I} = \underline{0,99}.$$

$$R_{\text{vst}} = \frac{U_{10}}{I} = \frac{\Delta_1}{I} = \frac{0,1012 \cdot I}{2,2464 \cdot 10^{-5} \cdot I} = \underline{4505 \Omega}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,42 \cdot 10^{-3} & -0,2 \cdot 10^{-3} \\ -0,1002 & 0,1012 \end{vmatrix} = 2,2464 \cdot 10^{-5}$$

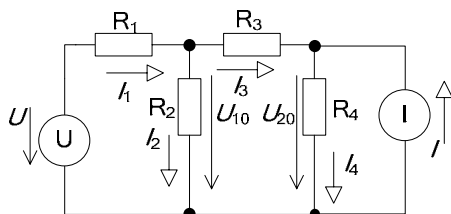
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} I & -0,2 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0,1012 \end{vmatrix} = 0,1012 \cdot I$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,42 \cdot 10^{-3} & I \\ -0,1002 & 0 \end{vmatrix} = 0,1002 \cdot I$$

NEREŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 6.7

Metodou uzlových napětí vypočtete uzlová napětí U_{10} a U_{20} a poté proudy I_1, I_2, I_3, I_4 .



$$U = 10 \text{ V}, I = 2 \text{ A}$$

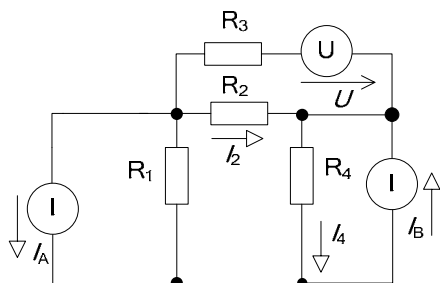
$$R_1 = 20 \Omega, R_2 = 10 \Omega$$

$$R_3 = 40 \Omega, R_4 = 50 \Omega$$

Výsledky: $U_{10} = \underline{10 \text{ V}}, U_{20} = \underline{50 \text{ V}}, I_1 = \underline{0 \text{ A}}, I_2 = \underline{1 \text{ A}}, I_3 = \underline{-1 \text{ A}}, I_4 = \underline{1 \text{ A}}$

Příklad 6.8

Metodou uzlových napětí vypočtete proudy I_2 a I_4 .



$$U = 20 \text{ V}$$

$$I_A = 1 \text{ A}, I_B = 2 \text{ A}$$

$$R_1 = R_4 = 10 \Omega$$

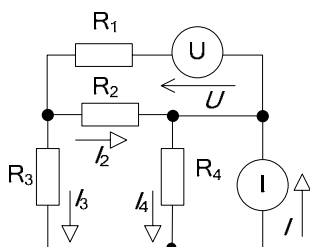
$$R_2 = 20 \Omega$$

$$R_3 = 40 \Omega$$

Výsledky: $I_2 = \underline{-0,4 \text{ A}}, I_4 = \underline{0,9 \text{ A}}$

Příklad 6.9

Metodou uzlových napětí vypočtete proudy I_2, I_3 a I_4 .



$$U = 20 \text{ V}$$

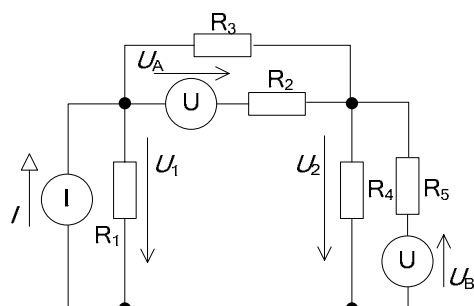
$$I = 2 \text{ A}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

Výsledky: $I_2 = \underline{-1,2 \text{ A}}, I_3 = \underline{0,4 \text{ A}}, I_4 = \underline{1,6 \text{ A}}$

Příklad 6.10

Pomocí MUN vypočtěte napětí U_1 a U_2 v obvodu na obrázku.



$$U_A = 5 \text{ V}, \quad U_B = 10 \text{ V}$$

$$I = 2 \text{ mA}$$

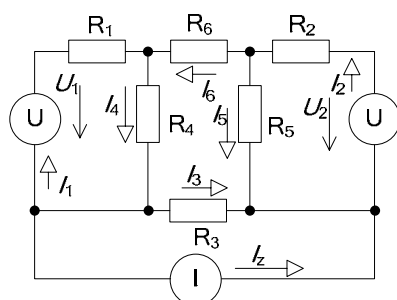
$$R_1 = R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 5,6 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 3,3 \text{ k}\Omega, \quad R_5 = 1 \text{ k}\Omega$$

Výsledky: $U_1 = \underline{0,2947 \text{ V}}, \quad U_2 = \underline{-6,242 \text{ V}}$

Příklad 6.11

Pomocí MUN určete proudy v obvodu.



$$U_1 = 12 \text{ V}, \quad U_2 = 16 \text{ V}$$

$$I_z = 3 \text{ mA}, \quad R_1 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

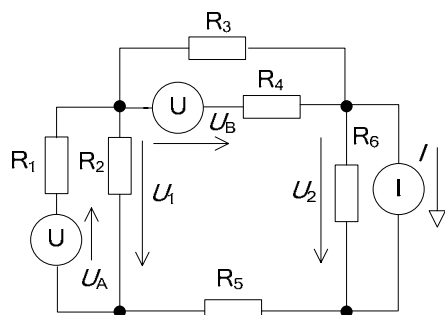
$$R_3 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 5 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 4 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 2 \text{ k}\Omega$$

Výsledky: $I_1 = \underline{1,409 \text{ mA}}, \quad I_2 = \underline{3,14 \text{ mA}}, \quad I_3 = \underline{-2,29 \text{ mA}}$
 $I_4 = \underline{2,118 \text{ mA}}, \quad I_5 = \underline{2,43 \text{ mA}}, \quad I_6 = \underline{0,7097 \text{ mA}}$

Příklad 6.12

Pomocí MUN určete napětí U_1 a U_2 v obvodu na obrázku.



$$U_A = 5 \text{ V}, \quad U_B = 10 \text{ V}$$

$$I = 2 \text{ mA}$$

$$R_1 = R_2 = 2,2 \text{ k}\Omega$$

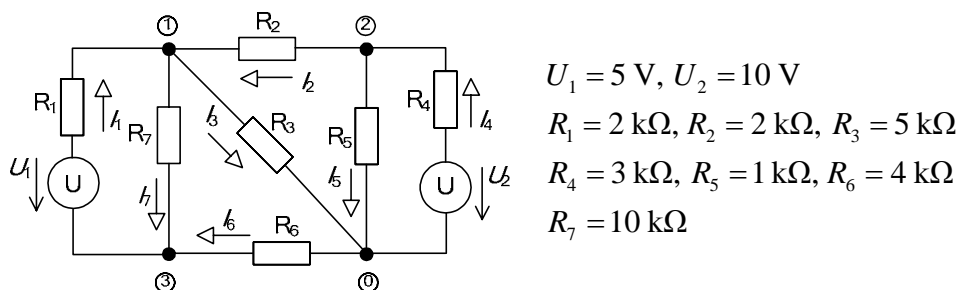
$$R_3 = 5,6 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 2,7 \text{ k}\Omega$$

$$R_5 = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 4,7 \text{ k}\Omega$$

Výsledky: $U_1 = \underline{-2,519 \text{ V}}, \quad U_2 = \underline{-9,316 \text{ V}}$

Příklad 6.13

Určete proudy větví obvodu na obrázku pomocí MUN.



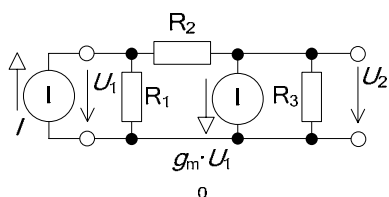
Výsledky:

$$I_1 = 0,7025 \text{ mA}, \quad I_2 = 0,101 \text{ mA}, \quad I_3 = 0,4 \text{ mA}, \quad I_4 = 2,525 \text{ mA},$$

$$I_5 = 2,424 \text{ mA}, \quad I_6 = 0,3433 \text{ mA}, \quad I_7 = 0,3595 \text{ mA}$$

Příklad 6.14

Metodou uzlových napětí určete napěťový přenos K_U a vstupní odpor R_{vst} lineárního dvojbranu obsahujícího zdroj proudu řízený napětím.



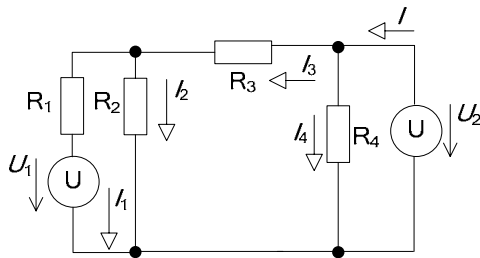
Výsledky: $K_U = -98,02, \quad R_{vst} = 458,6 \Omega$

7 Modifikovaná metoda uzlových napětí (MMUN)

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 7.1

Určete proudy v obvodu pomocí MMUN.



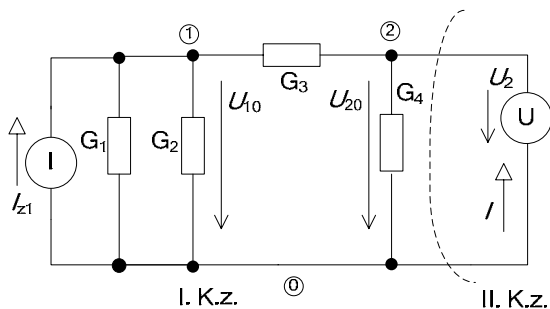
$$\begin{aligned} U_1 &= 5 \text{ V} \\ U_2 &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= R_3 = 5 \Omega \\ R_2 &= R_4 = 10 \Omega \end{aligned}$$

Řešení:

Zdroj U_2 je ideální, nelze jej převést na zdroj proudový. Proto nejprve sestavíme matici MUN pro zbylý obvod a doplníme podle K. z. řádek a sloupec pro zdroj U_2 .

Nejprve je nutno přepočítat zdroj napětí U_1 na zdroj proudu a odpory na vodivosti:

$$I_{z1} = \frac{U_1}{R_1} = 1 \text{ A}, \quad G_1 = G_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ S}, \quad G_2 = G_4 = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S}$$



Matice pro MUN:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Do uzlu 2 vtéká proud I , dále doplníme rovnici pro smyčku dle II. K.z $U_2 = U_{20}$, takže dostaneme matici MMUN:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ 0 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Po dosazení hodnot:

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 0,3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Řešením MMUN dostaneme: $U_{10} = 6 \text{ V}$, $U_{20} = 10 \text{ V}$, $I = 1,8 \text{ A}$

Pozor – proud I_1 je třeba určit z původního obvodu!

$$I_1 = -(I_{z1} - G_1 U_{10}) = 0,2 \text{ A}, \quad I_2 = U_{10} G_2 = 0,6 \text{ A}$$

$$I_3 = G_3 (U_{20} - U_{10}) = 0,8 \text{ A}, \quad I_4 = G_4 U_{20} = 1 \text{ A}$$

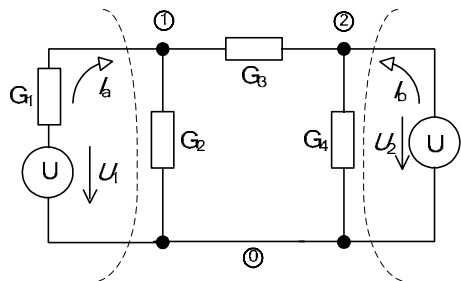
$$(\text{Zkouška: } -I + I_3 + I_4 = 0, \quad -U_2 + U_{20} = 0 \Rightarrow U_2 = U_{20} = 10 \text{ V})$$

Poznámka: MMUN je výhodné použít i pro reálné zdroje napětí, pokud se zajímáme o proud tekoucí zdrojem.

Příklad 7.2

Předešlý obvod řešte bez náhrady zdroje U_1 .

Řešení:



Podle II. K.z. napíšeme 2 rovnice:

$$U_{10} - U_1 + R_1 I_a = 0 \Rightarrow U_{10} + R_1 I_a = U_1$$

$$U_{20} - U_2 = 0 \Rightarrow U_{20} = U_2$$

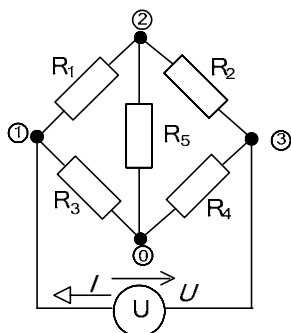
Dále vezmeme v úvahu, že do uzlu 1 vtéká proud I_a a do uzlu 2 vtéká proud I_b .

$$\begin{bmatrix} G_2 + G_3 & -G_3 & -1 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{Výsledek:} \quad \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \text{ V} \\ 10 \text{ V} \\ -0,2 \text{ A} \\ 1,8 \text{ A} \end{bmatrix}$$

Dále je možno určit i proudy obvodu, viz předešlý příklad.

Příklad 7.3

Vypočítejte uzlová napětí a proud I v uvedeném obvodu pomocí MMUN.



$$U = 2 \text{ V}, \quad R_1 = R_3 = 20 \, \Omega$$

$$R_2 = 40 \, \Omega, \quad R_4 = 10 \, \Omega, \quad R_5 = 25 \, \Omega$$

Řešení:

$$\text{Aplikací II. K.z.: } U_{10} - U_{30} - U = 0 \Rightarrow U_{10} - U_{30} = U$$

Proud I vtéká do uzlu 1 a vytéká z uzlu 3.

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_1 & 0 & -1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}$$

Řešením této maticové rovnice dostaneme:

$$U_{10} = \underline{1,235 \text{ V}}, \quad U_{20} = \underline{0,370 \text{ V}}, \quad U_{30} = \underline{-0,765 \text{ V}}, \quad I = \underline{0,1049 \text{ A}}$$

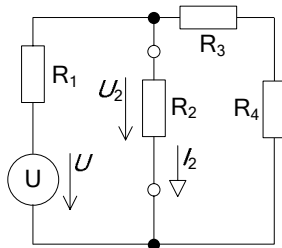
Poznámka.: Je zřejmé, že MMUN vede na větší počet rovnic, což není při počítačovém zpracování na závadu.

8 Metoda náhradního zdroje

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 8.1

V uvedeném obvodu vypočítejte napětí, proud a výkon rezistoru R_2 pomocí:
a) Théveninovy věty, b) Nortonovy věty.

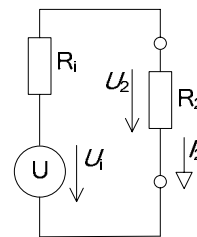
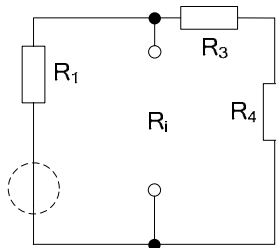
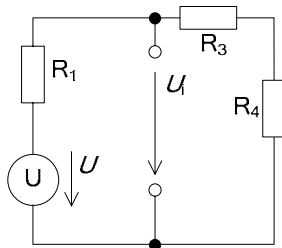


$$U = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = R_3 = 10 \, \Omega$$

$$R_2 = 20 \, \Omega, \quad R_4 = 40 \, \Omega$$

Řešení: a) Pomocí Théveninovy věty



$$I_2 = \frac{U_i}{R_i + R_2}$$

$$U_2 = I_2 R_2$$

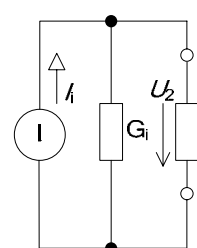
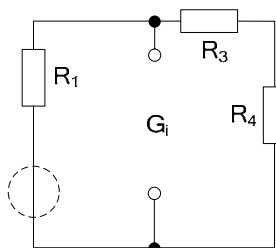
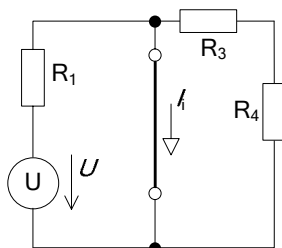
$$P_2 = U_2 I_2$$

$$U_i = U \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 20 \frac{50}{60} = 16,6 \text{ V}, \quad R_i = \frac{R_1 (R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{500}{60} = 8,3 \, \Omega$$

$$I_2 = \frac{U_i}{R_i + R_2} = \frac{16,6}{8,3 + 20} = 0,5882 \text{ A}, \quad U_2 = I_2 R_2 = 0,5882 \cdot 20 = 11,77 \text{ V}$$

$$P_2 = U_2 I_2 = 11,77 \cdot 0,5882 = 6,92 \text{ W}$$

b) Pomocí Nortonovy věty



$$I_2 = I_i \frac{G_2}{G_i + G_2}$$

$$U_2 = I_2 R_2$$

$$P_2 = U_2 I_2$$

$$I_i = \frac{U}{R_1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}, \quad G_i = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50} = 0,12 \text{ S}$$

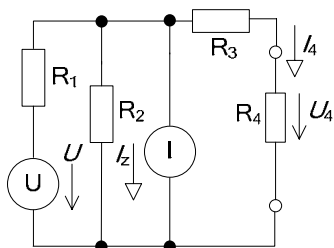
$$I_2 = I_i \frac{G_2}{G_i + G_2} = 2 \frac{0,05}{0,12 + 0,05} = 0,5882 \text{ A}, \quad U_2 = I_2 R_2 = 11,77 \text{ V}, \quad P_2 = U_2 I_2 = 6,92 \text{ W}$$

Poznámka: Výpočet pomocí Nortonovy věty je pro tento případ jednodušší díky snadnějšímu určení I_i oproti napětí naprázdno U_i .

Příklad 8.2

V uvedeném obvodu vypočítejte napětí, proud a výkon rezistoru R_4 pomocí:

a) Théveninovy věty, b) Nortonovy věty.



$$U = 10 \text{ V}$$

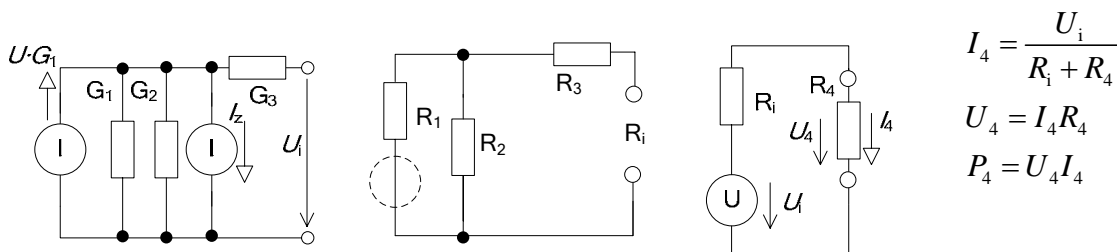
$$I_z = 2 \text{ A}$$

$$R_1 = R_3 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega, R_4 = 40 \Omega$$

Řešení:

a) Pomocí Théveninovy věty



$$I_4 = \frac{U_i}{R_i + R_4}$$

$$U_4 = I_4 R_4$$

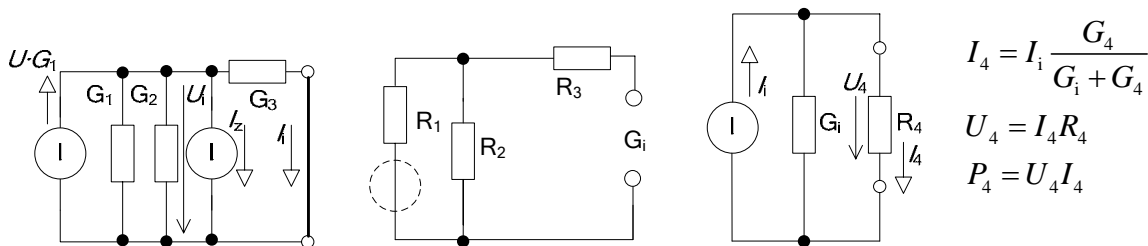
$$P_4 = U_4 I_4$$

$$(G_1 + G_2)U_i = UG_1 - I_z \Rightarrow U_i = \frac{UG_1 - I_z}{G_1 + G_2} = -6,6 \text{ V}, \quad R_i = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 16,6 \Omega$$

$$I_4 = \frac{U_i}{R_i + R_4} = \frac{-6,6}{16,6 + 40} = -0,1177 \text{ A}, \quad U_4 = I_4 R_4 = -0,1177 \cdot 40 = -4,706 \text{ V}$$

$$P_4 = U_4 I_4 = (-4,706)(-0,1177) = 0,5536 \text{ W}$$

b) Pomocí Nortonovy věty



$$I_4 = I_i \frac{G_4}{G_i + G_4}$$

$$U_4 = I_4 R_4$$

$$P_4 = U_4 I_4$$

$$(G_1 + G_2 + G_3)U_i = UG_1 - I_z \Rightarrow I_i = U_i G_3 = \frac{(UG_1 - I_z)G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{(10 \cdot 0,1 - 2)0,1}{0,1 + 0,05 + 0,1} = -0,4 \text{ A}$$

$$G_i = \frac{(G_1 + G_2)G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = 0,06 \text{ S}$$

$$I_4 = I_i \frac{G_4}{G_i + G_4} = -0,4 \frac{0,025}{0,06 + 0,025} = -0,1177 \text{ A}, \quad U_4 = I_4 R_4 = -4,706 \text{ V}$$

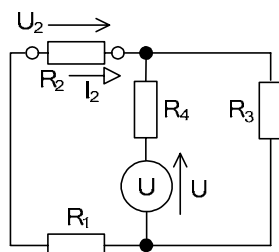
$$P_4 = U_4 I_4 = 0,5536 \text{ W}$$

Poznámka: Výpočet pomocí Nortonovy věty je pro tento případ složitější, neboť určení proudu nakrátko I_i je komplikovanější ve srovnání s určením napětí naprázdno U_i .

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 8.3

V uvedeném obvodu vypočítejte napětí, proud a výkon rezistoru R_2 pomocí:
a) Théveninovy věty, b) Nortonovy věty.



$$U = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = 15 \Omega$$

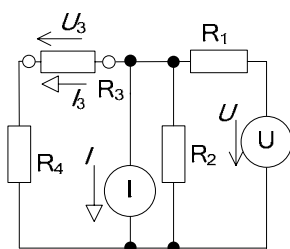
$$R_2 = 20 \Omega$$

$$R_3 = R_4 = 10 \Omega$$

Výsledky: $U_1 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $I_2 = 0,25 \text{ A}$, $U_2 = 5,0 \text{ V}$, $P_2 = 1,25 \text{ W}$

Příklad 8.4

V uvedeném obvodu vypočítejte napětí, proud a výkon rezistoru R_3 pomocí:
a) Théveninovy věty, b) Nortonovy věty.



$$U = 10 \text{ V}, I = 0,5 \text{ A}$$

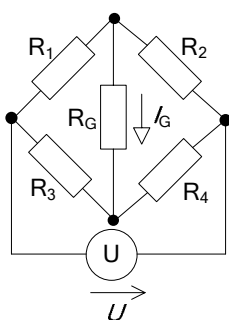
$$R_1 = R_3 = 10 \Omega$$

$$R_2 = 20 \Omega, R_4 = 40 \Omega$$

Výsledky: $I_3 = 0,05882 \text{ A}$, $U_3 = 0,5882 \text{ V}$, $P_3 = 0,0346 \text{ W}$

Příklad 8.5

V můstkovém zapojení určete proud I_G pomocí věty o náhradním napět'ovém zdroji.



$$U = 2 \text{ V}, R_1 = R_3 = 20 \Omega$$

$$R_2 = 40 \Omega, R_4 = 10 \Omega$$

$$R_G = 25 \Omega$$

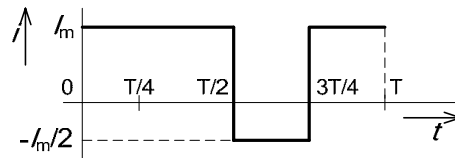
Výsledky: $U_1 = 0,6667 \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $I_G = 14,82 \text{ mA}$

9 Časově proměnné veličiny

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 9.1

Určete střední hodnotu (stejnoseměrnou složku) I_0 , střední absolutní hodnotu I_{sa} a efektivní hodnotu I pro periodický průběh proudu dle obrázku, je-li $I_m = 1$ A. Dále určete činitel tvaru a činitel výkyvu tohoto průběhu.



Řešení:

Střední hodnota (stejnoseměrná složka):

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} I_m dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \frac{-I_m}{2} dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T I_m dt \right) =$$

$$= \frac{I_m}{T} \left([t]_0^{T/4} + \left[\frac{-t}{2} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^T \right) = \frac{5I_m}{8} = 0,625 I_m = \underline{0,625 \text{ A}}$$

Střední absolutní hodnota:

$$I_{sa} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} I_m dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \frac{I_m}{2} dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T I_m dt \right) =$$

$$= \frac{I_m}{T} \left([t]_0^{T/4} + \left[\frac{t}{2} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^T \right) = \frac{7I_m}{8} = 0,875 I_m = \underline{0,875 \text{ A}}$$

Efektivní hodnota:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} I_m^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(\frac{I_m}{2} \right)^2 dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T I_m^2 dt \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \left([t]_0^{T/4} + \left[\frac{t}{4} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^T \right)} = \frac{\sqrt{13}}{4} I_m = \underline{0,9014 \text{ A}}$$

Činitel tvaru je podíl efektivní a střední absolutní hodnoty:

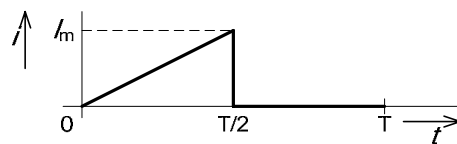
$$k_t = \frac{I}{I_{sa}} = \frac{0,9014}{0,875} = \underline{1,0302}$$

Činitel výkyvu je podíl maximální a efektivní hodnoty:

$$k_v = \frac{I_m}{I} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \underline{1,1094}$$

Příklad 9.2

Vypočítejte střední hodnotu I_0 , střední absolutní hodnotu I_{sa} a efektivní hodnotu I periodického průběhu proudu na obrázku, je-li jeho maximální hodnota $I_m = 5$ A. Určete činitel tvaru a činitel výkyvu.

**Řešení:**

Rovnice popisující časový průběh proudu se určí pomocí směrnice: $i(t) = \frac{2I_m}{T}t$

Střední hodnota:
$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{2I_m}{T} t dt = \frac{2I_m}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T/2} = \frac{I_m}{4} = \underline{1,25 \text{ A}}$$

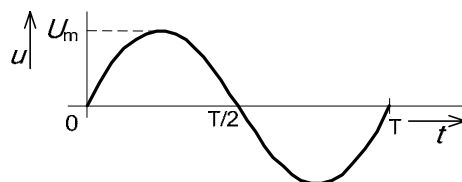
Střední absolutní hodnota: Protože průběh nabývá pouze kladných hodnot, platí $I_{sa} = I_0 = \underline{1,25 \text{ A}}$

Efektivní hodnota:
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2I_m}{T} t \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4I_m^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T/2}} = \frac{I_m}{\sqrt{6}} = \underline{2,041 \text{ A}}$$

Činitel tvaru: $k_t = \frac{I}{I_{sa}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \underline{1,633}$, činitel výkyvu: $k_v = \frac{I_m}{I} = \sqrt{6} = \underline{2,449}$

Příklad 9.3

Vypočítejte střední hodnotu U_0 , střední absolutní hodnotu U_{sa} a efektivní hodnotu U harmonického průběhu napětí na obrázku, je-li jeho maximální hodnota $U_m = 10$ V. Dále určete činitel tvaru a činitel výkyvu tohoto průběhu.

**Řešení:**

Rovnice popisující časový průběh napětí je: $u(t) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

Stejnoseměrná složka:
$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \frac{-U_m}{2\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^T = 0$$

(Stejnoseměrná složka je nulová, což je patrné ze symetrie průběhu.)

Střední absolutní hodnota:

$$\begin{aligned} U_{sa} &= \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \\ &= \frac{-U_m}{\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi} U_m = \underline{6,366 \text{ V}} \end{aligned}$$

(Vzhledem k symetrii průběhu lze provést integraci pouze za polovinu periody, kdy je hodnota nezáporná).

Efektivní hodnota:
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right)\right) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} \left[t - \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \right]_0^T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \doteq 7,071 \text{ V}$$

Činitel tvaru: $k_t = \frac{U}{U_{sa}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,1107$, činitel výkyvu: $k_v = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} = 1,414$

Příklad 9.4

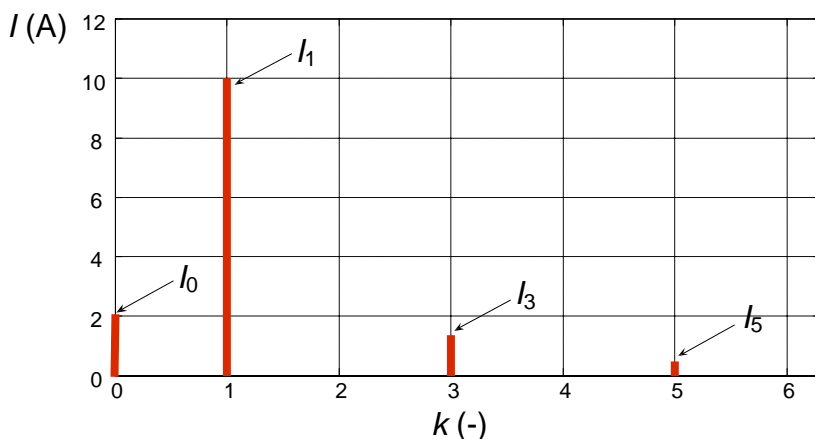
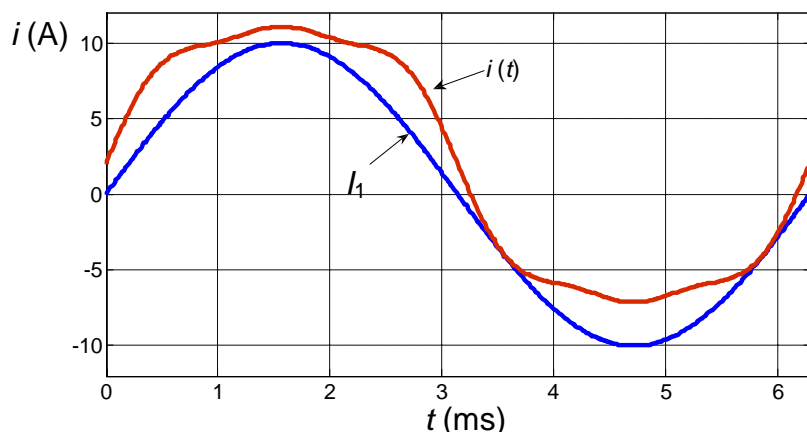
Proud $i(t)$ neharmonického průběhu má spektrum obsahující tyto harmonické složky: $I_0 = 2 \text{ A}$; $I_1 = 10 \text{ A}$; $I_3 = 1,5 \text{ A}$; $I_5 = 0,6 \text{ A}$. Určete činitel zkreslení v %.

Řešení: Výpočet činitele zkreslení je možný podle dvou vztahů

$$k = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1} = \frac{\sqrt{I_3^2 + I_5^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{1,5^2 + 0,6^2}}{10} \doteq 0,1616 = 16,16 \%$$

$$k' = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{I_3^2 + I_5^2}}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2}} = \frac{\sqrt{1,5^2 + 0,6^2}}{\sqrt{10^2 + 1,5^2 + 0,6^2}} \doteq 0,1595 = 15,95 \%$$

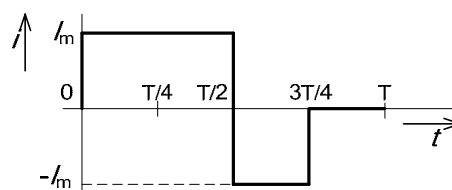
Je vidět, že obě hodnoty jsou velmi blízké. Stejnoseměrná složka I_0 nemá na činitel zkreslení vliv. Časový průběh (pro porovnání s 1. harmonickou) a spektrum signálu jsou v grafech.



NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 9.5

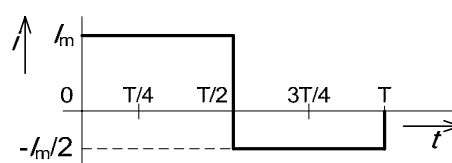
Vypočítejte střední hodnotu (stejnoseměrnou složku) a efektivní hodnotu pro periodický průběh proudu dle obrázku, je-li $I_m = 1$ A.



Výsledky: $I_0 = 0,25$ A, $I = 0,8660$ A

Příklad 9.6

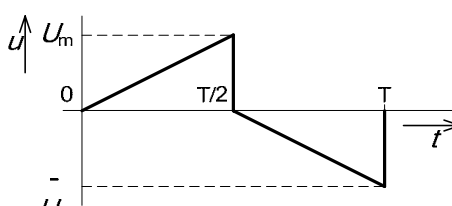
Vypočítejte střední hodnotu (stejnoseměrnou složku), střední absolutní hodnotu a efektivní hodnotu pro periodický průběh proudu dle obrázku, je-li $I_m = 0,5$ A. Určete činitel tvaru a činitel výkyvu tohoto průběhu.



Výsledky: $I_0 = 0,125$ A, $I_{sa} = 0,375$ A, $I = 0,3953$ A, $k_t = 1,054$, $k_v = 1,265$

Příklad 9.7

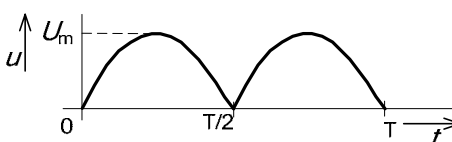
Vypočítejte střední hodnotu (stejnoseměrnou složku), střední absolutní hodnotu a efektivní hodnotu pro periodický průběh napětí dle obrázku, je-li $U_m = 10$ V. Určete činitel tvaru a činitel výkyvu tohoto průběhu.



Výsledky: $U_0 = 0$, $U_{sa} = 5$ V, $U = 5,774$ V, $k_t = 1,155$, $k_v = 1,732$

Příklad 9.8

Vypočítejte střední hodnotu U_0 , střední absolutní hodnotu U_{sa} a efektivní hodnotu U usměrněného harmonického průběhu napětí na obrázku, je-li jeho maximální hodnota $U_m = 10$ V. Dále určete činitel tvaru a činitel výkyvu tohoto průběhu.



Výsledky: $U_0 = 6,366$ V, $U_{sa} = 6,366$ V, $U = 7,071$ V, $k_t = 1,1107$, $k_v = 1,141$

Příklad 9.9

Napětí $u(t)$ neharmonického průběhu má spektrum obsahující tyto harmonické složky: $U_0 = 1,5$ V; $U_1 = 5,2$ V; $U_2 = 0,35$ V; $U_3 = 0,25$ V a $U_5 = 0,12$ V. Určete činitel zkreslení.

Výsledky: $k \doteq 8,59$ %, $k' \doteq 8,56$ %

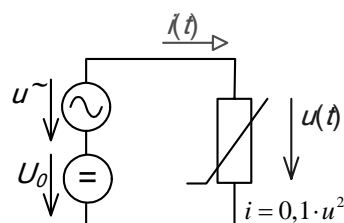
10 Nelineární obvody

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Spektrum neharmonických průběhů

Příklad 10.1

Vypočítejte amplitudové spektrum proudu v obvodu z obrázku, působí-li na prvek napětí $u(t) = 3 + 2\sin(\omega t)$. Ampérvoltová charakteristika nelineárního odporu je určena rovnicí $i(t) = 0,1u^2(t)$.



Řešení:

Napětí zdroje obsahuje stejnosměrnou složku (3 V) a harmonickou složku (2 V):

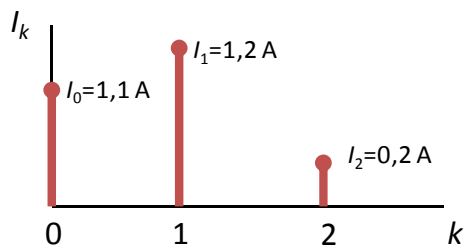
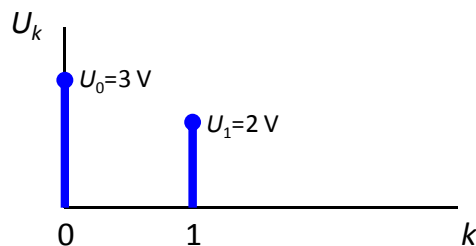
$$u(t) = 3 + 2\sin(\omega t)$$

Proud nelineárním odporem je:

$$i(t) = 0,1 \cdot u^2 = 0,1(3 + 2\sin(\omega t))^2 = 1,1 + 1,2\sin(\omega t) - 0,2\cos(2\omega t).$$

Poznámka: bylo použito vztahu $\sin^2(\alpha) = 0,5(1 - \cos(2\alpha))$.

Proud obsahuje tedy stejnosměrnou složku (1,1 A), základní 1. harmonickou složku (1,2 A) a 2. harmonickou složku (0,2 A). Spektra napětí i proudu jsou ukázána v grafech.

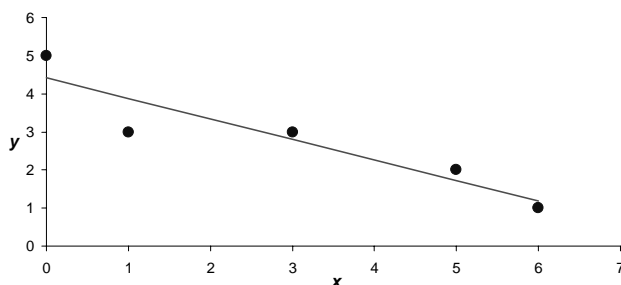


Aproximace nelineárních charakteristik

Příklad 10.2

Pomocí metody nejmenších čtverců aproximujte přímkou průběh funkce $y = f(x)$ zadané tabulkou v $m = 5$ bodech.

x_j	0	1	3	5	6
y_j	5	3	3	2	1



Řešení:

Hledáme minimum tzv. kritériální funkce, která je tvořena součtem odchylek aproximační funkce od původní funkce v daných bodech.

Rovnice hledané aproximační funkce (přímky) je $y_a = a_0 + a_1 x$, je třeba určit a_0 a a_1 .

Kritériální funkce je $\sigma(a_0, a_1) = \sum_{j=1}^m (y_j - a_1 x_j - a_0)^2$ a hledáme $\min \{ \sigma(a_0, a_1) \}$.

Minimum se nalezne pomocí parciálních derivací kritériální funkce, které se položí rovny nule. V maticovém zápise tak dostaneme:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_j \\ \sum x_j & \sum x_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_j \\ \sum x_j y_j \end{bmatrix},$$

přítom členy rovnice nejlépe zjistíme pomocnou tabulkou.

j	x_j	y_j	x_j^2	$x_j \cdot y_j$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
Σ	15	14	71	28

Po dosazení do maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 71 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

je řešení

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,415 \\ -0,538 \end{bmatrix}.$$

Hledaná aproximační přímka je popsána rovnicí $y_a = 4,415 - 0,538 \cdot x$ a její průběh je uveden v grafu.

Příklad 10.3

Pro křemíkovou diodu v propustném směru byla naměřena část ampérvoltové charakteristiky, viz tabulka a graf naměřených bodů.

a) Proveďte interpolaci této charakteristiky kvadratickým polynomem pro pracovní bod $0,6 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$.

b) Pro pracovní bod $0,6 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$ určete statický a dynamický odpor diody.

$u \text{ (V)}$	0,20	0,40	0,50	0,55	0,60	0,625	0,65	0,675	0,70
$i \text{ (A)}$	0	0	0,0005	0,004	0,02	0,20	0,45	0,60	1,0

Řešení:

Rovnice hledané aproximační funkce (polynomu 2. stupně) je $y_a = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, hledáme koeficienty a_0 , a_1 a a_2 . Polynom bude procházet 3 body, podle zadání pro $u = (0,50; 0,60; 0,70) \text{ V}$, v tabulce vyznačeno tučně.

Rovnice polynomu musí vyhovovat těmto 3 určeným bodům:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 &= i_1 \\ a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 &= i_2, \text{ v maticovém zápise } \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \\ a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 &= i_3 \end{aligned}$$

Dosažením vybraných bodů z tabulky

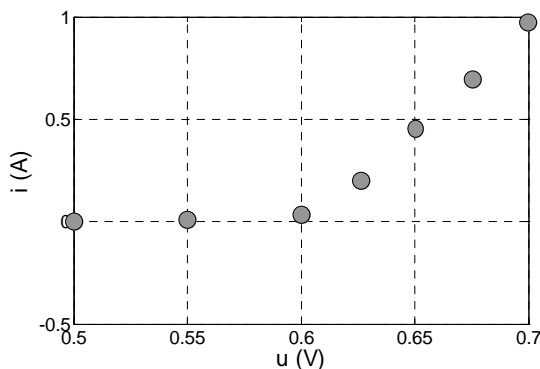
$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5^2 \\ 1 & 0,6 & 0,6^2 \\ 1 & 0,7 & 0,7^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,02 \\ 1,0 \end{bmatrix} \text{ dostaneme řešení } \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,31 \\ -52,63 \\ 48,03 \end{bmatrix}.$$

Hledaná interpolační funkce je popsána rovnicí $i_a = (14,31 - 52,63 \cdot u + 48,03 \cdot u^2)$ A a její průběh je uveden v grafu.

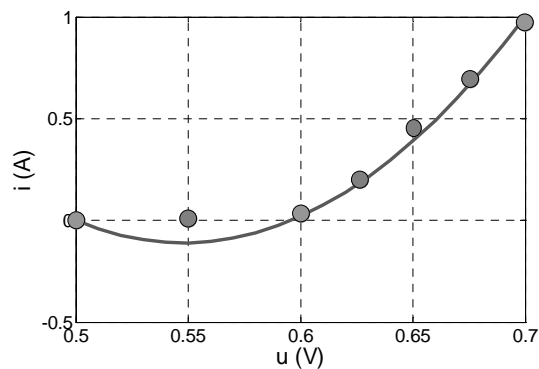
Statický odpor pro $u_p = 0,6$ V je: $R_s(0,6) = \frac{u_p}{i_p} = \frac{0,6}{0,02} = 30 \Omega.$

Dynamický odpor lze určit z okolních bodů: $R_d(0,6) = \frac{\Delta u_p}{\Delta i_p} = \frac{0,7 - 0,5}{1 - 0,0005} = 0,2001 \Omega,$

alternativně z interpolační funkce: $R'_d(0,6) = G_d^{-1} = \left(\frac{di_a}{du} \right)^{-1} = (96,06u - 52,63)^{-1} = 0,1998 \Omega$



Naměřené body charakteristiky diody



Interpolační funkce (polynom 2. stupně.

Metody řešení nelineárních obvodů

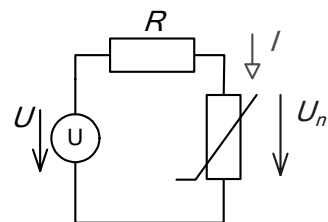
Příklad 10.4

Analytickým řešením určete proud I nelineárním obvodem.

$$U = 10 \text{ V}$$

$$R = 5 \Omega$$

$$U_n = 3I^2 + 2I$$



Řešení: Podle II. K.z.:

$$3I^2 + 2I + RI - U = 0$$

$$U_n + RI - U = 0$$

$$3I^2 + 7I - 10 = 0$$

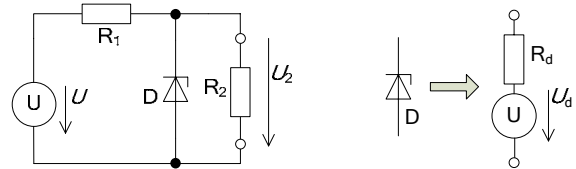
Řešení kvadratické rovnice je:

$$I_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} I_1 = 1 \text{ A} \\ I_2 = -3, \bar{3} \text{ A} \end{cases}$$

V tomto případě má smysl pouze $I = \underline{1 \text{ A}}$.

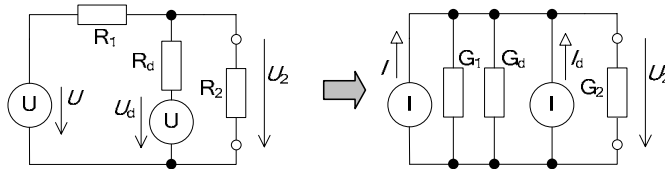
Příklad 10.5

Stabilizátor napětí je zatížen odporem R_2 . Určete napětí U_2 na zátěži, má-li linearizovaný model stabilizační diody v závěrném směru parametry: $U_d = 5,7 \text{ V}$, $R_d = 2 \Omega$.



$$U = 10 \text{ V}, R_1 = 100 \Omega, R_2 = 250 \Omega$$

Řešení: linearizovaný obvod řešíme např. pomocí MUN.



$$I = \frac{U}{R_1} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ A}$$

$$I_d = \frac{U_d}{R_d} = \frac{5,7}{2} = 2,85 \text{ A}$$

$$G_1 = 100^{-1} = 0,01 \text{ S}$$

$$G_2 = 250^{-1} = 0,004 \text{ S}$$

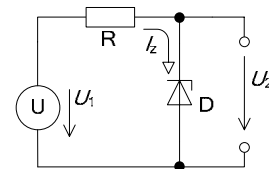
$$G_d = 2^{-1} = 0,5 \text{ S}$$

$$(G_1 + G_2 + G_d)U_2 = I + I_d$$

$$0,514 \cdot U_2 = 2,95, \quad U_2 = \underline{5,739 \text{ V}}$$

Příklad 10.6

Stabilizátor napětí se Zenerovou diodou ZD 4V8 pracuje naprázdno (bez zátěže). Určete výstupní napětí při napájení ze zdroje $U_1 = 12 \text{ V}$. Dále určete, jak se změní U_2 při zvýšení vstupního napětí U_1 z 12 V na 15 V a stanovte činitel stabilizace obvodu. Vypočítejte ztrátový výkon diody a rezistoru. Charakteristiku diody v závěrném směru udává tabulka, pro výpočet použijte linearizovaný model diody pro okolí $U_z = 4,8 \text{ V}$.



$$U_1 = 12 \text{ V}$$

$$U_1' = 15 \text{ V}$$

$$R = 33 \Omega$$

$u \text{ (V)}$	-4,00	-4,50	-4,65	-4,80	-5,00
$i \text{ (A)}$	-0,003	-0,012	-0,035	-0,15	-0,50

Řešení: Linearizaci charakteristiky diody provedeme aproximací metodou nejmenších čtverců:

j	u_j	i_j	u_j^2	$u_j \cdot i_j$
1	-4,65	-0,035	21,623	0,1628
2	-4,80	-0,15	23,04	0,72
3	-5,00	-0,50	25	2,5
Σ	-14,45	-0,685	69,663	3,3828

$$\begin{bmatrix} m & \sum u_j \\ \sum u_j & \sum u_j^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_j \\ \sum u_j i_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -14,45 \\ -14,45 & 69,663 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,685 \\ 3,3828 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,232 \\ 1,341 \end{bmatrix}$$

Linearizovaný model Zenerovy diody lze pro okolí bodu $U_z = 4,8 \text{ V}$ popsat rovnicí pro Nortonův náhradní zdroj:

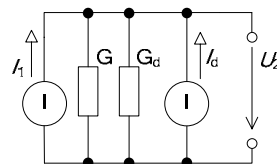
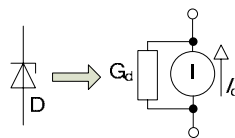
$$I_z = G_d \cdot U_2 + I_d = (1,341 \cdot U_2 + 6,232) \text{ A}.$$

Obvod s linearizovaným modelem pak řešíme např. pomocí MUN.

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{12}{33} = 0,36 \text{ A}, \quad I'_1 = \frac{U'_1}{R} = \frac{15}{33} = 0,45 \text{ A}$$

$$I_d = 6,232 \text{ A}$$

$$G = \frac{1}{33} = 0,030 \text{ S}, \quad G_d = 1,341 \text{ S}$$



Stabilizované výstupní napětí pro $U_1 = 12 \text{ V}$: $U_2 = \frac{I_1 + I_d}{G + G_d} = \frac{6,596}{1,371} = 4,811 \text{ V}.$

Stabilizované výstupní napětí pro $U'_1 = 15 \text{ V}$: $U'_2 = \frac{I'_1 + I_d}{G + G_d} = \frac{6,687}{1,371} = 4,876 \text{ V}.$

Výstupní napětí při změně U_1 z 12 V na 15 V ($\Delta U_1 = 3 \text{ V}$) se změní pouze o $\Delta U_2 = 4,876 - 4,811 = 66 \text{ mV}$.

Činitel stabilizace je: $s = \frac{\frac{\Delta U_1}{U_1}}{\frac{\Delta U_2}{U_2}} = \frac{\frac{15-12}{12}}{\frac{4,876-4,811}{4,811}} = 18,2.$

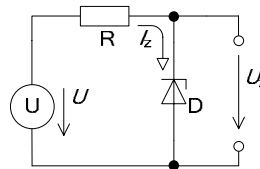
Proud diodou se určí z úbytku na R : $I_z = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{12 - 4,811}{33} = 218 \text{ mA}.$

Ztrátový výkon na diodě: $P_D = U_2 I_z = 4,811 \cdot 0,218 = 1,048 \text{ W}$

na rezistoru: $P_R = R I_z^2 = 33 \cdot 0,218^2 = 1,569 \text{ W}.$

Příklad 10.7

Stabilizátor napětí se Zenerovou diodou ZD 4V8 pracuje naprázdno (bez zátěže). Grafickou metodou určete pracovní bod diody (U_z , I_z) a její ztrátový výkon. Z grafu zjistěte změnu výstupního napětí při změně vstupního napětí o $\pm 1 \text{ V}$. Charakteristiku diody v závěrném směru udává graf.



$$U = 6 \text{ V}$$

$$R = 15 \Omega$$

Řešení:

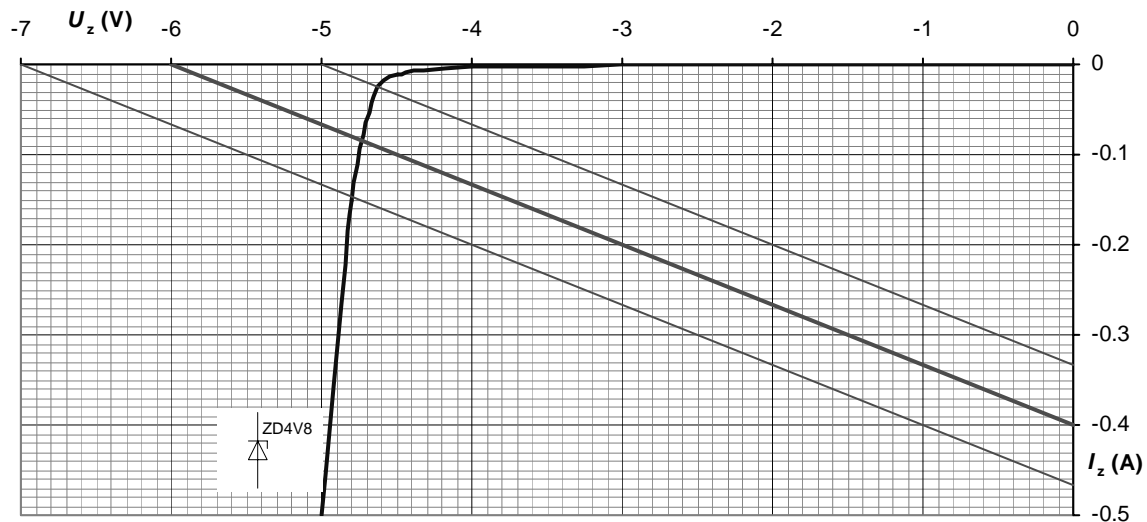
Použijeme metodu zatěžovací přímky, kterou zakreslíme do grafu AV charakteristiky nelineárního prvku. Zatěžovací přímka představuje převrácenou AV charakteristiku náhradního

zdroje lineární části obvodu a je dána dvěma body – napětí naprázdno (dioda odpojena) a proud nakrátko (dioda nahrazena zkratem), její směrnice tak odpovídá vodivosti $1/R$.

Napětí naprázdno je $U_0 = U = 6 \text{ V}$, proud nakrátko je $I_k = \frac{U}{R} = \frac{6}{15} = 0,4 \text{ A}$. Po zakreslení přímky do grafu dostaneme průsečík – pracovní bod (4,75 V, 85 mA).

Ztrátový výkon diody je $P_D = U_z I_z = 4,75 \cdot 0,085 = 0,404 \text{ W}$.

Při změně U o $\pm 1 \text{ V}$ se posunou zatěžovací přímky na $[U_0; I_k] = [-5; -0,333]$ resp. $[-7; -0,466]$. Této změně odpovídá změna výstupního napětí U_z na 4,65 V resp. 4,8 V.



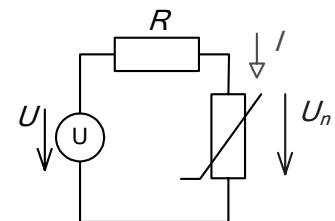
Příklad 10.8

Určete proud I nelineárním obvodem. Použijte Newtonovu iterační metodu.

$$U = 10 \text{ V}$$

$$R = 10 \Omega$$

$$U_n = 20I^2$$



Řešení:

Podle II. K.z.:

$$U_n + RI - U = 0$$

$$20I^2 + 10I - 10 = 0$$

Newtonova iterace: $i_{(k+1)} = i_{(k)} + \varepsilon_{(k)}$, kde

$$\varepsilon_{(k)} = -\frac{f}{f'} = \frac{-20I_k^2 - 10I_k + 10}{40I_k + 10} \text{ je oprava pro } k+1 \text{ krok.}$$

Jako počáteční odhad (nultou iteraci) volíme např. $U/R = 1 \text{ A}$.

Iterační funkce:

$$f = 20I^2 + 10I - 10$$

Derivace:

$$f' = \frac{df}{dI} = 40I + 10$$

k	0	1	2	3	4
$I_{(k)}$	1	0,6	0,5059	0,5000	0,5000
$\varepsilon_{(k)}$	-0,4	-0,0941	-0,0059	$-2,3 \cdot 10^{-5}$	$-3,5 \cdot 10^{-10}$

Pro dostatečnou přesnost stačí 3 iterační kroky.

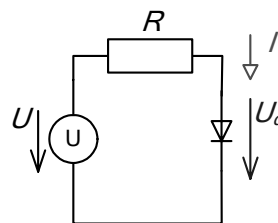
Proud obvodem je $I = \underline{0,5000 \text{ A}}$.

Příklad 10.9

Určete napětí U_d na křemíkové diodě. Charakteristika diody je dána exponenciální rovnicí. Pro Si diodu předpokládáme hodnotu U_d v rozsahu 0,6 - 0,7 V. Použijte iterační metodu půlení intervalu, řešte s chybou pod 1 mV.

$$U = 5 \text{ V}, R = 150 \Omega$$

$$I_d = 2 \cdot 10^{-12} e^{38U_d}$$

**Řešení:**

Podle II. K.z.:

$$U_d + RI - U = 0, \quad U_d + 3 \cdot 10^{-10} e^{38U_d} - 5 = 0.$$

Iterační funkce je $f(U_d) = U_d + 3 \cdot 10^{-10} e^{38U_d} - 5$, počáteční interval $a = 0,6 \text{ V}$ a $b = 0,7 \text{ V}$.

Odhad hodnoty je dán průměrem (půlením) $u(k) = \frac{a+b}{2}$. Při následující iteraci se upraví interval podle toho, ve kterém leží hledaný kořen iterační rovnice. Iterace se ukončí, když chyba $\varepsilon(k) = \frac{b-a}{2}$ klesne pod zadanou hodnotu.

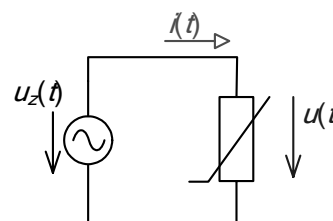
k	a	$u(k)$	b	$f(a)$	$f(u(k))$	$f(b)$	ε
0	0,6	0,65	0,7	-2,00649	⊕ 11,65276	102,6928	0,05
1	0,6	0,625	0,65	-2,00649	⊕ 1,813925	11,65276	0,025
2	0,6	0,6125	0,625	-2,00649	-0,5387	⊕ 1,813925	0,0125
3	0,6125	0,61875	0,625	-0,5387	⊕ 0,499317	1,813925	0,00625
4	0,6125	0,615625	0,61875	-0,5387	-0,05029	⊕ 0,499317	0,003125
5	0,615625	0,617188	0,61875	-0,05029	⊕ 0,216406	0,499317	0,001562
6	0,615625	0,616406	0,617188	-0,05029	0,081092	0,216406	0,000781

Napětí na diodě je $U_d = \underline{(616,4 \pm 0,8) \text{ mV}}$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY**Příklad 10.10**

Vypočítejte amplitudové spektrum proudu v obvodu z obrázku, působí-li na prvek napětí $u(t) = 10\sin(\omega t)$. Ampérovoltová charakteristika nelineárního odporu je určena rovnicí $i(t) = 0,3u^2(t) + 2u(t)$.

$$\text{Pomůcka: } \sin^2(\alpha) = 0,5(1 - \cos(2\alpha))$$



$$\text{Výsledek: } i(t) = 15 + 20\sin(\omega t) - 15\cos(2\omega t).$$

Amplitudy harmonických složek proudu jsou: $I_0 = \underline{15 \text{ A}}$, $I_1 = \underline{20 \text{ A}}$ a $I_2 = \underline{15 \text{ A}}$.

Příklad 10.11

Určete kvadratický interpolační polynom $i_a = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$, který aproximuje charakteristiku nelineárního prvku v bodech uvedených v tabulce. Extrapolujte pomocí vypočtené aproximační funkce chybějící proud prvkem pro napětí 0,7 V. Pro tučně vyznačený pracovní bod určete statický a dynamický odpor nelineárního prvku.

u (V)	0,1	0,2	0,45	0,7
i (mA)	0,1	0,35	0,85	

Výsledky: $i_a = (-0,1786 + 2,929u - 1,429u^2) \text{ mA}$,

$$i(u = 0,7 \text{ V}) = \underline{1,171 \text{ mA}},$$

$$R_s(0,2) = \underline{0,571 \Omega}, \quad R_d(0,2) = \underline{0,4242 \Omega}$$

Příklad 10.12

Pro křemíkovou diodu v propustném směru byla naměřena část ampérvoltové charakteristiky, viz tabulka. Metodou nejmenších čtverců proveďte aproximaci charakteristiky přímkou.

u (V)	0,6	0,625	0,65	0,675
i (A)	0,02	0,15	0,4	0,8

Výsledek: $i_a = (10,36 \cdot u - 6,262) \text{ A}$.

Příklad 10.13

Pro křemíkovou diodu v propustném směru byla naměřena část ampérvoltové charakteristiky, viz tabulka. Proveďte interpolaci této charakteristiky kvadratickým polynomem pro pracovní bod $0,65 \text{ V} \pm 0,05 \text{ V}$.

u (V)	0,20	0,40	0,50	0,55	0,60	0,625	0,65	0,675	0,70
i (A)	0	0	0,0005	0,004	0,02	0,20	0,45	0,60	1,0

Výsledek: $i_a = (4,22 - 21,4u + 24u^2) \text{ A}$

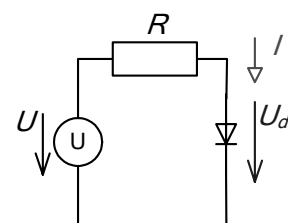
Příklad 10.14

Určete napětí U_d na křemíkové diodě. Charakteristika diody je dána exponenciální rovnicí. Pro Si diodu předpokládáme hodnotu U_d asi 0,7 V. Použijte Newtonovu iterační metodu, řešte s chybou pod 1 mV.

$$U = 10 \text{ V}, \quad R = 50 \Omega$$

$$I_d = 5 \cdot 10^{-12} e^{38U_d}$$

Výsledek: $U_d \doteq 0,6407 \text{ V}$



Příklad 10.15

Předchozí zadání (Příklad 10.14) řešte pomocí metody půlení intervalu pro počáteční odhad 0,6 - 0,7 V.

Výsledek: $U_d \doteq 0,6407 \text{ V}$

Příklad 10.16

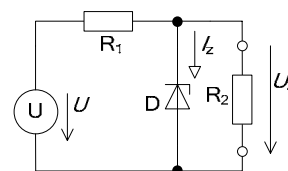
Napětí na výstupu nelineárního obvodu lze popsat rovnicí $U^3 - 5 \cdot U = 0$. Vypočtete hodnotu napětí U s přesností lepší než 0,5 %. Použijte Newtonovu iterační metodu s počátečním odhadem $U_{(0)} = 3 \text{ V}$.

Výsledek: $U \doteq 2,2365 \text{ V}$.

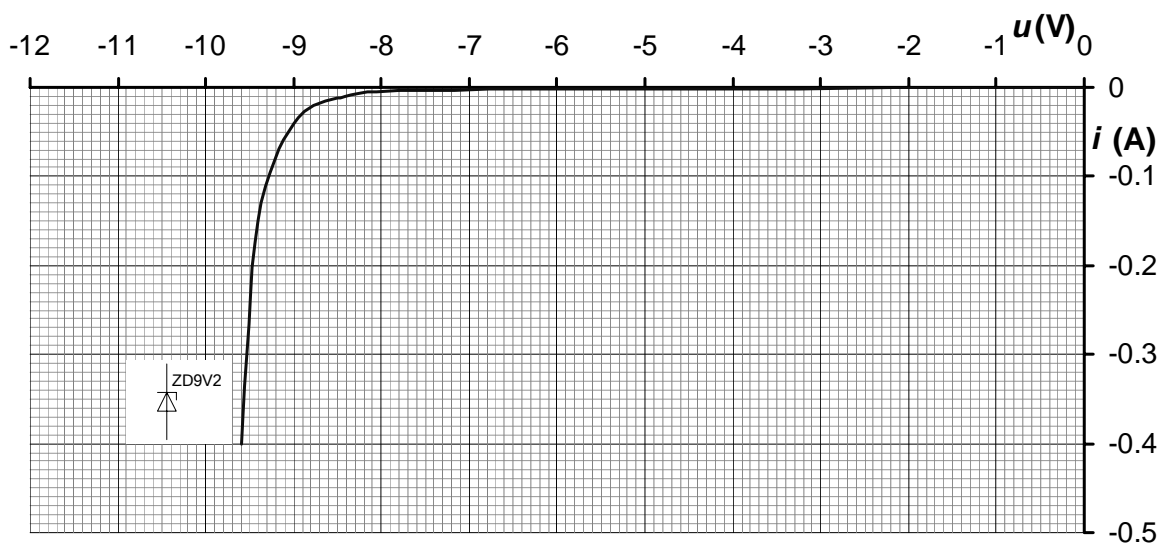
Příklad 10.17

Grafickou metodou určete pracovní bod (U_z , I_z) a ztrátový výkon diody v zatíženém stabilizátoru napětí. Charakteristiku použité diody v závěrném směru udává graf.

$U = 12 \text{ V}$, $R_1 = 33 \Omega$, $R_2 = 470 \Omega$



Nápověda: Náhrad'te lineární část obvodu dle Théveninovy věty.



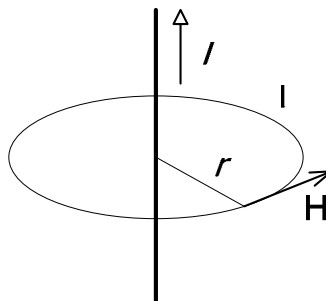
Výsledky: Pracovní bod stabilizační diody je (9,15 V, 65 mA). Ztrátový výkon diody je $P_D = U_z I_z = 9,15 \cdot 0,065 = \underline{0,595 \text{ W}}$

11 Magnetické obvody

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 11.1

Dlouhým přímým vodičem protéká proud $I = 10$ A. Určete velikost intenzity magnetického pole H ve vzdálenosti 1 m od vodiče.



Řešení:

Výchozí vztah

(Ampérův zákon celkového proudu):

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\ell = I$$

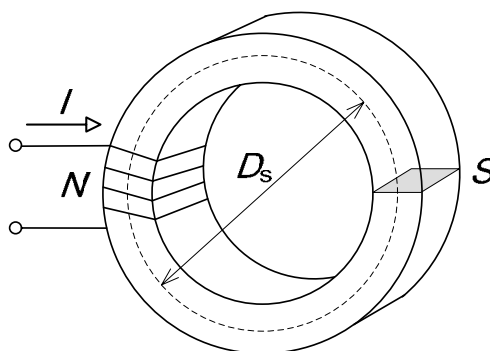
Aplikace vztahu pro dané zadání:

(vektor \mathbf{H} je všude rovnoběžný s $d\ell$)

$$H \cdot 2\pi r = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{10}{2\pi \cdot 1} = \underline{1,592 \text{ A/m}}$$

Příklad 11.2

Na prstenci z transformátorových plechů průřezu $S = 600 \text{ mm}^2$ je vinutí s $N = 200$ závitů. Střední průměr prstence je $D_s = 220$ mm. Jak velký proud I musí vinutím procházet, aby vznikl magnetický tok $\Phi = 0,6 \text{ mWb}$?



Řešení:

Magnetické pole v prstenci lze považovat přibližně za homogenní. Indukce v jádře je:

$$B_f = \frac{\Phi}{S} = \frac{0,6 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-4}} = 1 \text{ T}$$

Pro hodnotu $B_f = 1 \text{ T}$ zjistíme z magnetizační křivky transformátorových plechů (příloha na konci kapitoly) hodnotu intenzity:

$$H_f \doteq 330 \text{ A/m}$$

Z Ampérova zákona lze psát pro intenzitu pole ve feromagnetiku:

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\ell = \sum I \Rightarrow H_f \ell_s = NI$$

Střední délka siločáry je:

$$\ell_s = \pi D_s = 0,6912 \text{ m}$$

Hledaný proud je:

$$I = \frac{H_f \ell_s}{N} = \frac{330 \cdot 0,6912}{200} = \underline{1,14 \text{ A}}$$

Příklad 11.3

Cívka je navinuta na toroidním jádře, má $N = 200$ závitů a protéká jí proud $I = 1$ A. Určete magnetický tok jádrem Φ a indukčnost cívky L . Střední průměr toroidu $D_s = 120$ mm, průřez magnetického obvodu $S = 4$ cm². Rozptylové toky zanedbejte.

Magnetické vlastnosti materiálu toroidu

H_f (A/m)	390	530	700	900
B_f (T)	0,6	0,7	0,8	0,9

Řešení:

Ekvivalentní obvod obsahuje zdroj magnetického napětí $U_{mn} = NI$ a magnetický odpor obvodu. Magnetický odpor je tvořen feromagnetikem a je proto nelineární. Úbytek magnetického napětí na odporu je $U_{mf} = H_f \ell_s$.

Platí obdoba II. K.z. – součet magnetických napětí v obvodu je roven nule:

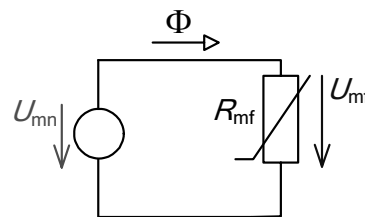
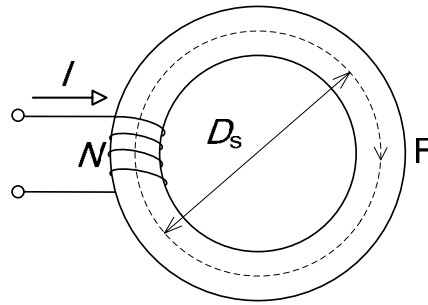
Střední délka siločáry:

Intenzita magnetického pole v jádře je

Tomu, odpovídá magnetická indukce v jádře (odečteno z tabulky):

Magnetický tok obvodem je:

Indukčnost cívky je podíl spřaženého magnetického toku $\Psi = N\Phi$ k proudu I :



$$U_{mn} = U_{mf} \Rightarrow NI = H_f \ell_s$$

$$\ell_s = \pi D_s = 0,377 \text{ m}$$

$$H_f = \frac{U_m}{\ell_s} = \frac{NI}{\pi D_s} = \frac{200}{0,377} = 530 \text{ A/m}$$

$$B_f = 0,7 \text{ T} \quad (\text{pro } H_f = 530 \text{ A/m})$$

$$\Phi = B_f \cdot S = 0,7 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = \underline{280 \text{ } \mu\text{Wb}}$$

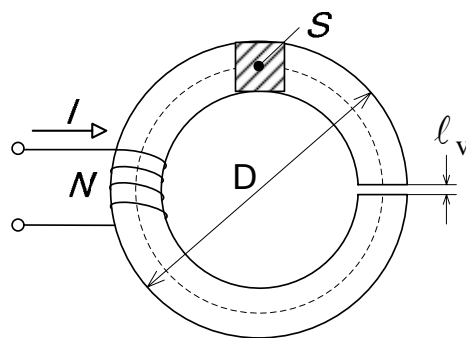
$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{200 \cdot 280 \cdot 10^{-6}}{1} = \underline{56 \text{ mH}}$$

Příklad 11.4

Prstenec z feromagnetického materiálu má průměr $D = 90$ mm, plocha průřezu jádra je $S = 10 \times 10$ mm. Ve vzduchové mezeře $\ell_v = 1$ mm požadujeme indukci $B_v = 0,5$ T. Vypočtete potřebný počet závitů budicí cívky při proudu $I = 5$ A a indukčnost cívky L pro tento proud. Rozptylové toky zanedbejte.

Magnetické vlastnosti materiálu prstence

B_f (T)	0,3	0,5	0,7	0,9
H_f (A/m)	66	109	167	262

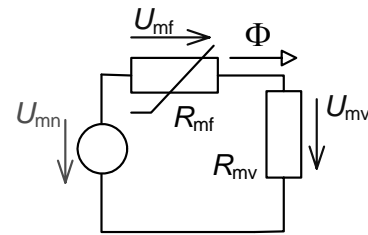


Řešení:

Ekvivalentní obvod obsahuje zdroj magnetického napětí $U_{mn} = NI$, magnetický odpor feromagnetika a magnetický odpor vzduchové mezery.

Průřez S a stejně tak i magnetický tok jsou konstantní po celé délce siločáry, $\Phi = B_f \cdot S = B_v \cdot S$. Z toho plyne, že indukce v jádře je shodná s indukcí v mezeře, $B_f = B_v$.

Střední délka siločáry v magnetiku:



$$D_s = D - 10 = 90 - 10 = 80 \text{ mm}$$

$$\ell_f = \pi D_s - \ell_v = 0,2503 \text{ m}$$

Platí II. K. z.:

$$U_{mn} = U_{mf} + U_{mv}$$

Intenzita magnetického pole v jádře pro indukci 0,5 T se určí pomocí tabulky, $H_f (B_f = 0,5 \text{ T}) = 109 \text{ A/m}$. Z předešlé rovnice dostaneme:

$$NI = H_f \ell_f + H_v \ell_v = H_f \ell_f + \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v$$

$$5 \cdot N = 109 \cdot 0,2503 + \frac{0,5}{4\pi \cdot 10^{-7}} 1 \cdot 10^{-3}$$

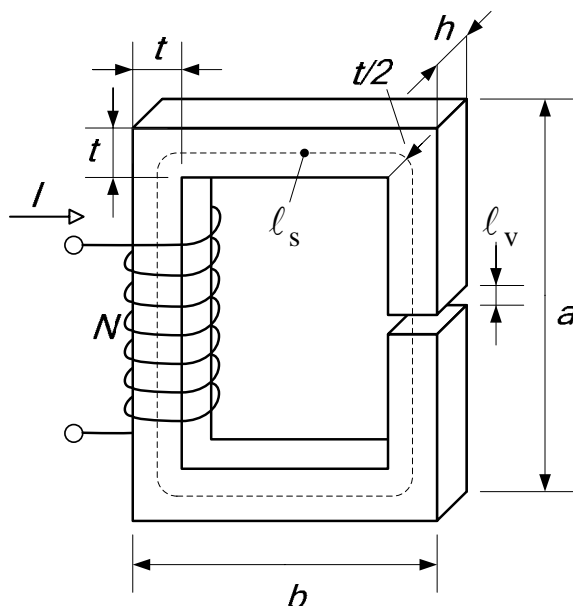
a z toho potřebný počet závitů budicí cívky:

$$N = 85,03 \approx 85$$

Indukčnost této cívky pro $I = 5 \text{ A}$ je: $L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N \cdot B_v \cdot S}{I} = \frac{85 \cdot 0,5 \cdot (10 \cdot 10^{-3})^2}{5} = \underline{\underline{850 \mu\text{H}}}$

Příklad 11.5

Vypočítejte velikost magnetovacího proudu I potřebnou pro vytvoření magnetické indukce ve vzduchové mezeře $B_v = 0,5 \text{ T}$. Jádru je složeno z dynamových plechů s činitelem plnění $k_p = 0,9$ (činitel plnění jádra udává poměr průřezu samotného feromagnetika v jádře k celkovému průřezu jádra, tj. včetně izolace mezi plechy). Počet závitů cívky je $N = 1000$.



Rozměry jádra:

$$a = 300 \text{ mm}$$

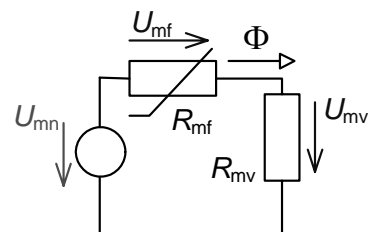
$$b = 200 \text{ mm}$$

$$t = 20 \text{ mm}$$

$$h = 30 \text{ mm}$$

$$\ell_v = 5 \text{ mm}$$

Náhradní obvod:



Řešení:

Předpokládáme homogenní magnetické pole. Pro sériový magnetický obvod platí (se započtením činitele plnění jádra):

$$\Phi = \Phi_f = \Phi_v = B_f \cdot S \cdot k_p = B_v \cdot S = \text{konst.}$$

Protože je průřez magnetického obvodu po celé délce siločáry konstantní, je i indukce konstantní:

$$B_f = B_v / k_p = 0,5 / 0,9 = 0,556 \text{ T}$$

Střední siločáru geometricky tvoří čtyři úsečky a čtyři čtvrtkružnice v rozích. Délka střední siločáry ve feromagnetiku je tedy:

$$\begin{aligned} \ell_f &= 2(a - 2t) + 2(b - 2t) - \ell_v + 4 \cdot \frac{2\pi t / 2}{4} = 2(a + b - 4t) + \pi t - \ell_v = \\ &= 2(0,3 + 0,2 - 4 \cdot 0,02) + 0,02\pi - 0,005 = 0,8978 \text{ m} \end{aligned}$$

Pro magnetické napětí lze psát:

$$\begin{aligned} U_{mn} &= NI = U_{mf} + U_{mv} = \\ &= H_f \ell_f + H_v \ell_v = H_f \ell_f + \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v \end{aligned}$$

Magnetické napětí na vzduchové mezeře je:

$$U_{mv} = \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v = \frac{0,5}{4\pi \cdot 10^{-7}} 5 \cdot 10^{-3} = 1989 \text{ A}$$

Intenzita magnetického pole v jádře (odečtená z grafu magnetizační charakteristiky pro dynamové plechy v příloze na konci kapitoly) je:

$$H_f (B_f = 0,556 \text{ T}) \doteq 100 \text{ A/m}$$

Magnetické napětí na feromagnetiku je:

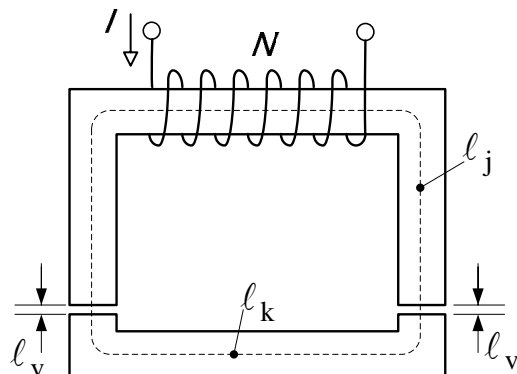
$$U_{mf} = H_f \ell_f = 100 \cdot 0,8978 = 89,78 \text{ A}$$

Potřebný magnetovací proud je:

$$I = \frac{U_{mf} + U_{mv}}{N} = \frac{89,78 + 1989}{1000} \doteq \underline{\underline{2,08 \text{ A}}}$$

Příklad 11.6

Cívka elektromagnetu s $N = 100$ závitů je protékána proudem $I = 100 \text{ mA}$. Jádro i kotva mají stejný průřez $S = 2,5 \text{ cm}^2$. Střední délka magnetické siločáry v jádru je $\ell_j = 4 \text{ cm}$, v kotvě $\ell_k = 2 \text{ cm}$. Délka vzduchové mezery je $\ell_v = 0,05 \text{ mm}$. Relativní permeabilitu materiálu jádra $\mu_{rj} = 500$ a relativní permeabilitu materiálu kotvy $\mu_{rk} = 300$ pokládáme za konstantní (magnetický obvod je linearizován). Nakreslete náhradní schéma obvodu, vypočtete magnetická napětí na jednotlivých částech magnetického obvodu a určete indukčnost cívky.



Magnetický odpor jádra:

$$R_{mj} = \frac{\ell_j}{\mu_0 \mu_{rj} S} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 254648 \text{ H}^{-1}$$

Magnetický odpor kotvy:

$$R_{mk} = \frac{\ell_k}{\mu_0 \mu_{rk} S} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 212207 \text{ H}^{-1}$$

Magnetický odpor vzduchové mezery:

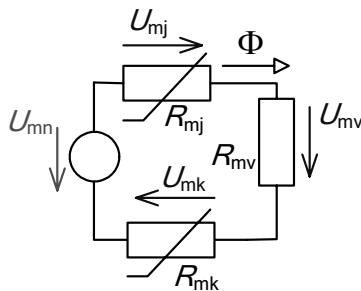
$$R_{mv} = \frac{2\ell_v}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 318310 \text{ H}^{-1}$$

Magnetické napětí zdroje:

$$U_{mn} = N \cdot I = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ A}$$

Magnetický indukční tok:

$$\Phi = \frac{U_{mn}}{R_{mj} + R_{mk} + R_{mv}} = \frac{10}{785164} = 12,736 \mu\text{Wb}$$



Magnetická napětí na jednotlivých částech obvodu:

$$U_{mj} = \Phi \cdot R_{mj} = 12,736 \cdot 10^{-6} \cdot 254648 = \underline{3,243 \text{ A}}$$

$$U_{mk} = \Phi \cdot R_{mk} = 12,736 \cdot 10^{-6} \cdot 212207 = \underline{2,703 \text{ A}}$$

$$U_{mv} = \Phi \cdot R_{mv} = 12,736 \cdot 10^{-6} \cdot 318310 = \underline{4,054 \text{ A}}$$

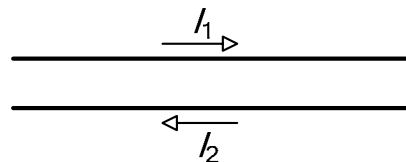
$$\text{Zkouška: } U_{mn} = U_{mj} + U_{mk} + U_{mv}, \quad 10 \text{ A} = 10 \text{ A}$$

Indukčnost cívky je:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{100 \cdot 12,736 \cdot 10^{-6}}{0,1} = \underline{12,74 \text{ mH}}$$

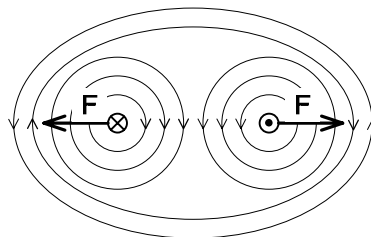
Příklad 11.7

Zkratový proud $I_1 = I_2 = 40 \text{ kA}$ (vzájemně opačného směru) protéká dvěma paralelně uloženými vodiči vzdálenými od sebe $r = 5 \text{ cm}$. Jaká působí síla F na každý metr vodičů?



Řešení:

Fyzikální podstata silových účinků proudů



Výpočet magnetické indukce způsobené jedním vodičem v místě druhého vodiče

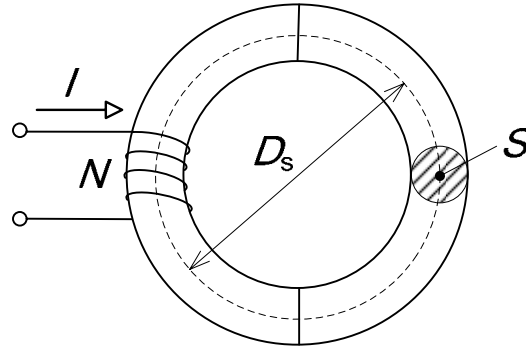
$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} \Rightarrow B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Výpočet síly, která působí na druhý vodič s proudem I_2 v poli s indukcí B_1 (vyvolané prvním vodičem) pro $\ell = 1 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} F &= B_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} I_2 \ell = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi r} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (40 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = \underline{6400 \text{ N}} \end{aligned}$$

Příklad 11.8

Prstencové jádro cívky z elektrotechnické oceli E11 je složeno ze dvou přiléhajících částí. Průřez prstence je $S = 4 \text{ cm}^2$, jeho střední průměr je $D_s = 0,2 \text{ m}$ a cívkou, která má $N = 100$ závitů, protéká proud $I = 5 \text{ A}$. Jak velkou silou jsou drženy obě části pohromadě?

**Řešení:**

Intenzita magnetického pole v jádře je z Ampérova zákona celkového proudu:

$$U_m = NI = H_f \ell_f \Rightarrow H_f = \frac{NI}{\ell_f}$$

Střední délka siločáry:

$$\ell_f = \pi D_s = \pi \cdot 0,2 = 0,6283 \text{ m}$$

Výpočet intenzity magnetického pole:

$$H_f = \frac{NI}{\ell_f} = \frac{100 \cdot 5}{0,6283} = 796 \text{ A/m}$$

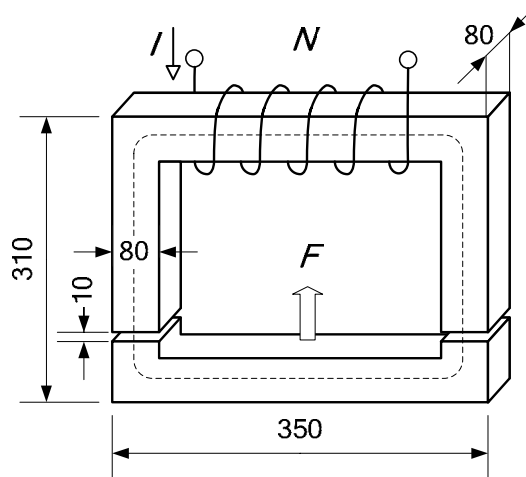
Z magnetizační křivky oceli E11 (příloha na konci kapitoly) odečteme odpovídající hodnotu magnetické indukce $B_f (H_f = 796 \text{ A/m}) \doteq 1,38 \text{ T}$.

Výpočet síly (plochu průřezu je třeba započíst dvakrát):

$$F = 2 \frac{B_f^2 S}{2\mu_0} = \frac{1,38^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \doteq 606 \text{ N}$$

Příklad 11.9

Elektromagnet z elektrotechnické oceli E11 zadaných rozměrů (v mm) má přitáhnout kotvu ze vzdálenosti 1 cm silou $F = 5600 \text{ N}$. Jak velký proud musí protékat cívkou, má-li cívka $N = 500$ závitů. Uvažujte rozšíření průřezu magnetického pole ve vzduchové mezeře o 10 %.

**Řešení:**

Průřez ve vzduchové mezeře je o 10 % větší:

$$S_v = 1,1 \cdot S_f = 1,1 \cdot 0,08 \cdot 0,08 = 70,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Pro vytvoření zadané síly je potřeba magnetické indukce ve vzduchu:

(Plochu mezery je třeba započítat dvakrát.)

$$F = \frac{B_v^2 2S_v}{2\mu_0}$$

$$B_v = \sqrt{\frac{\mu_0 F}{S_v}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5600}{70,4 \cdot 10^{-4}}} \doteq 1 \text{ T}$$

Z rovnosti magnetických toků ve feromagnetiku a ve vzduchové mezeře odvodíme magnetickou indukci v jádře:

$$\Phi = B_f \cdot S_f = B_v \cdot S_v = \text{konst.}$$

$$B_f = \frac{B_v \cdot S_v}{S_f} = \frac{B_v \cdot 1,1 S_f}{S_f} = 1,1 B_v = 1,1 \text{ T}$$

Z magnetizační křivky oceli E11 (příloha na konci kapitoly) odečteme odpovídající hodnotu intenzity magnetického pole H_f ($B_f = 1 \text{ T}$) $\doteq 300 \text{ A/m}$.

Střední délka siločáry ve vzduchu:

$$\ell_v = 2 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ m}$$

Střední délka siločáry ve feromagnetiku:

$$\ell_f = 2(0,31 - 0,08 + 0,35 - 0,08) - \ell_v = 0,98 \text{ m}$$

Potřebné magnetické napětí zdroje je dáno součtem magnetických napětí na feromagnetiku a na vzduchové mezeře:

$$U_{mn} = NI = U_{mf} + U_{mv} = H_f \ell_f + \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v =$$

(všimněte si zanedbatelně malého U_{mf})

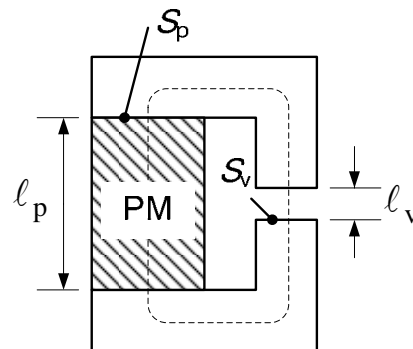
$$= 300 \cdot 0,98 + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} 0,02 = 16209 \text{ A}$$

Pro vytvoření přitahu 5600 N je třeba proud

$$I = \frac{U_{mn}}{N} = \frac{16209}{500} \doteq 32,4 \text{ A}$$

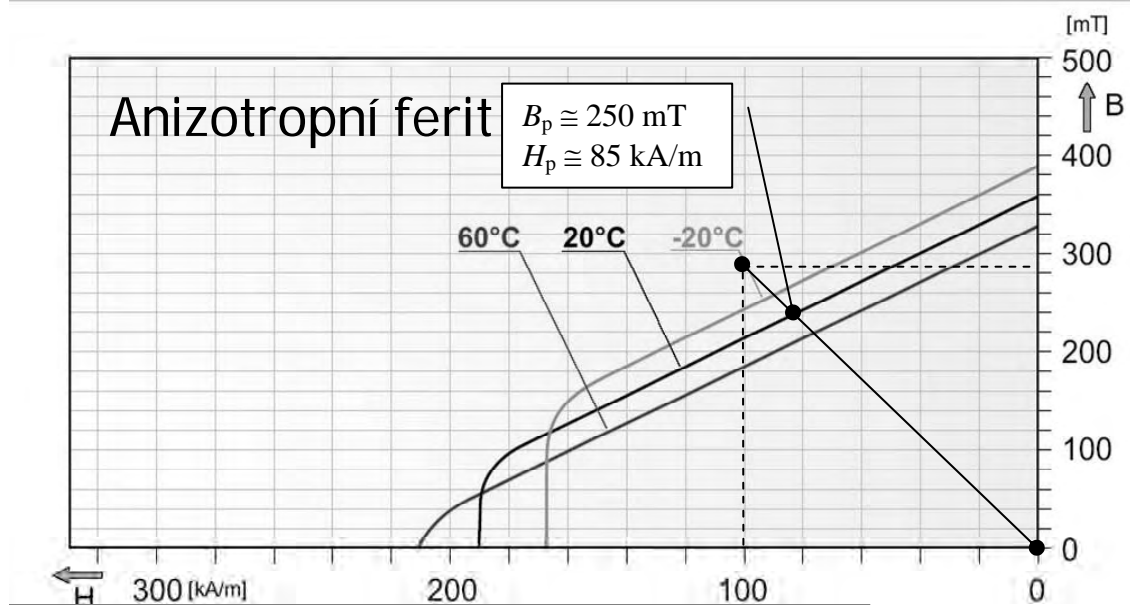
Příklad 11.10

Mezi pólovými nástavci je vzduchová mezera délky ℓ_v a s plochou S_v . Zdrojem pole je feritový permanentní magnet výšky ℓ_p a plochy S_p . Určete magnetickou indukci ve vzduchové mezeře při teplotě 20°C . Magnetizační křivka použitého anizotropního feritu viz graf, magnetický odpor pólových nástavců a rozptylové toky zanedbejte.



$$S_v = 3 \text{ cm}^2, \ell_v = 0,5 \text{ cm}$$

$$S_p = 8 \text{ cm}^2, \ell_p = 3 \text{ cm}$$



Řešení:

Při zanedbání rozptylových toků platí:

$$\Phi_p = \Phi_v = B_p \cdot S_p = B_v \cdot S_v = \text{konst.}$$

$$B_v = \frac{B_p \cdot S_p}{S_v} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}} B_p$$

Při zanedbání odporu nástavců platí:

$$U_{mn} = H_p \ell_p = U_{mv} = \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v, \text{ z toho}$$

$$B_v = \frac{\mu_0 H_p \ell_p}{\ell_v} = 7,5398 \cdot 10^{-6} H_p$$

Spojením obou rovnic pro B_v dostaneme rovnici zatěžovací přímký magnetického obvodu, kterou zakreslíme do grafu BH charakteristiky feritu. Určíme např. dva body: $B = 0$; $H = 0$ a $B = 0,2827$; $H = 100 \text{ kA/m}$, viz graf.

$$\frac{8}{3} B_p = 7,5398 \cdot 10^{-6} H_p$$

$$B_p = 2,8274 \cdot 10^{-6} H_p$$

Z průsečíku zatěžovací přímký obvodu a charakteristiky zdroje magnetického napětí (feritu) zjistíme pracovní bod $B_p \approx 250 \text{ mT}$, $H_p \approx 85 \text{ kA/m}$. Z toho pak indukce v mezeře:

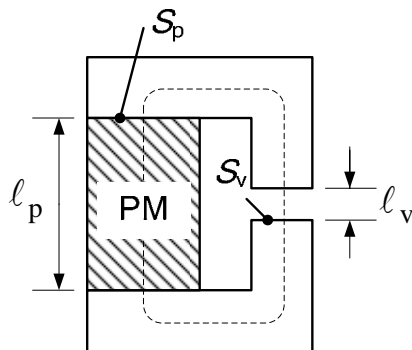
$$B_v = \frac{8}{3} B_p = \underline{0,67 \text{ T}}$$

Příklad 11.11

Mezi pólovými nástavci je vzduchová mezera délky ℓ_v a s plochou S_v . V mezeře je třeba vytvořit pole s indukcí $B_v = 0,5 \text{ T}$. Zdrojem pole je permanentní magnet s optimálním pracovním bodem $B_p \approx 230 \text{ mT}$, $H_p \approx 90 \text{ kA/m}$.

Určete potřebnou výšku ℓ_p a plochu S_p permanentního magnetu. Magnetický odpor pólových nástavců a rozptylové toky zanedbejte.

$$S_v = 5 \text{ cm}^2, \ell_v = 0,6 \text{ cm}$$



Při zanedbání rozptylových toků platí:

$$\Phi_p = \Phi_v = B_p \cdot S_p = B_v \cdot S_v = \text{konst.}$$

Z toho potřebná plocha PM:

$$S_p = \frac{B_v \cdot S_v}{B_p} = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0,23} = \underline{10,87 \text{ cm}^2}$$

Při zanedbání odporu nástavců platí:

$$U_{mn} = H_p \ell_p = U_{mv} = \frac{B_v}{\mu_0} \ell_v$$

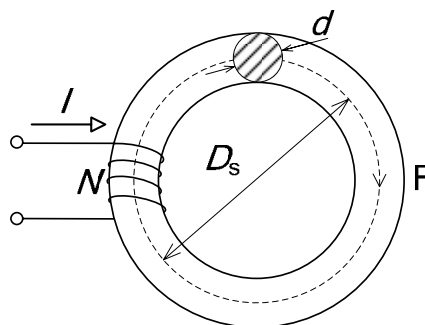
Potřebná výška PM:

$$\ell_p = \frac{B_v \ell_v}{\mu_0 H_p} = \frac{0,5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 90 \cdot 10^3} = \underline{2,653 \text{ cm}}$$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 11.12

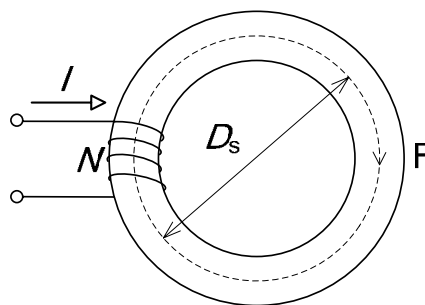
Určete intenzitu a indukci magnetického pole, magnetický tok a indukčnost cívky navinuté na litinovém prstenci o kruhovém průřezu s průměrem $d = 4$ cm. Střední průměr prstence je $D_s = 15$ cm. Vinutí má $N = 220$ závitů a budicí proud je $I = 1$ A.



Výsledky: $H_f = 467$ A, $B_f = 0,38$ T, $\Phi = 478 \mu\text{Wb}$, $L = 105$ mH

Příklad 11.13

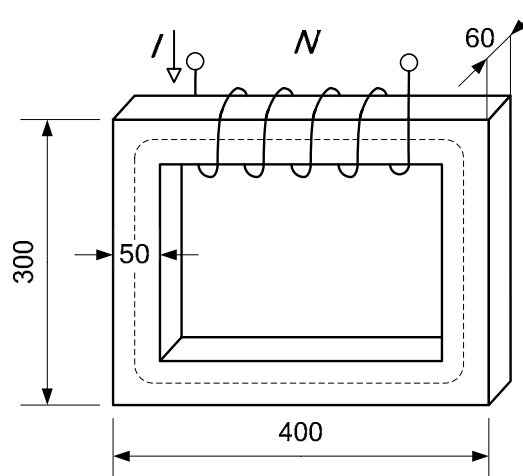
Jak velký proud musí protékat budicí cívkou, která má $N = 100$ závitů, aby vznikl v magnetickém obvodu tok $\Phi = 1$ mWb. Toroid vyrobený z dynamových plechů má průřez jádra $S = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ a střední průměr $D_s = 0,2$ m.



Výsledek: $I \doteq 1,7$ A

Příklad 11.14

Jádro z transformátorových plechů má rozměry dle obrázku. Jaký počet závitů N musí mít magnetovací vinutí, má-li jádrem procházet magnetický tok $\Phi = 2$ mWb při budícím proudu $I = 2,2$ A? Dále určete magnetický odpor R_m obvodu a indukčnost budícího vinutí L .

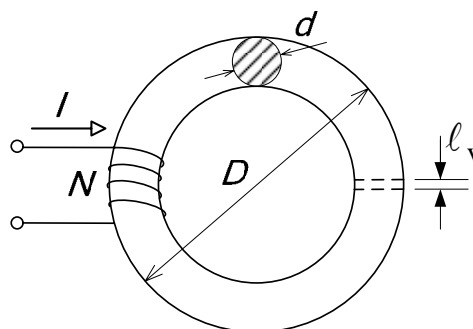


Výsledky: $N = 90$, $R_m = 99000 \text{ H}^{-1}$, $L = 81,8$ mH

Příklad 11.15

Feromagnetické jádro má tvar prstence (vlastnosti materiálu popisuje tabulka) o průměru $D = 250$ mm, průměr jádra je $d = 50$ mm.

- Vypočítejte potřebný počet závitů N_1 tak, aby proudem $I = 5$ A vznikla v jádru indukce $B_f = 0,7$ T.
- V jádru byla vytvořena vzduchová mezera $\ell_v = 1$ mm. Vypočítejte potřebný počet závitů budícího vinutí N_2 tak, aby indukce v jádru zůstala stejná.



Rozptylové toky zanedbejte.

Magnetické vlastnosti materiálu prstence

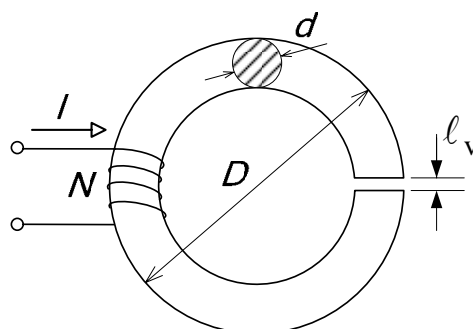
B_f (T)	0,3	0,5	0,7	0,9
H_f (A/m)	66	109	167	262

Výsledky: $N_1 = 21$, $N_2 = 132$

Příklad 11.16

Na toroidním jádře z ocelolitininy je navinuta cívka $N = 200$ záv. Průměr toroidu je $D = 120$ mm, jeho průřez má průměr $d = 20$ mm. V obvodu je vzduchová mezera $\ell_v = 1,2$ mm, ve které je indukce $B_v = 0,8$ T.

- Vypočítejte magnetická napětí na feromagnetickém jádru U_{mf} a na vzduchové mezeře U_{mv} .
- Vypočítejte budící proud I cívky.

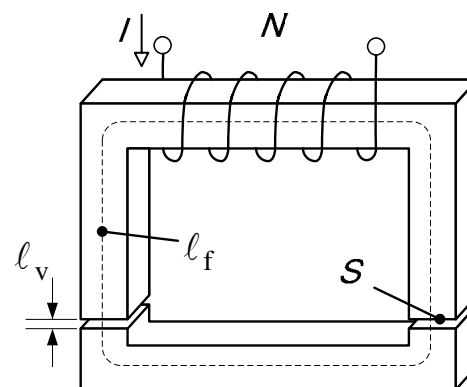


Rozptylové toky zanedbejte.

Výsledky: $U_{mf} = 87,96$ A, $U_{mv} = 763,9$ A, $I = 4,26$ A

Příklad 11.17

Určete magnetické napětí potřebné k vytvoření magnetického pole s indukcí $B_v = 1$ T ve vzduchové mezeře. Průřez ocelového jádra (ocel E11) je $S = 16$ cm², délka vzduchové mezery $\ell_v = 0,5$ mm, délka střední siločáry v jádře je $\ell_f = 1,1$ m.

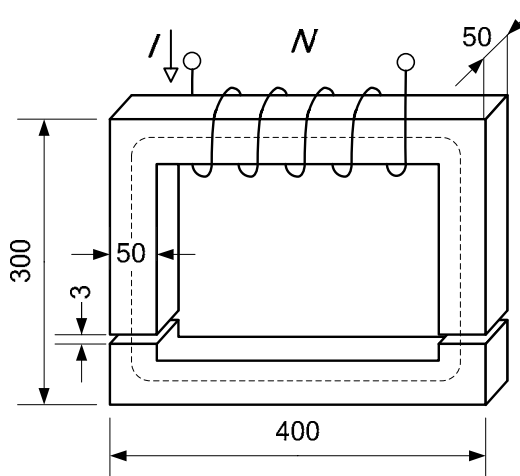


Výsledek: $U_{mf} = N \cdot I = 662$ A

Příklad 11.18

Elektromagnet má jádro zadaných rozměrů (v mm) z materiálu s velkou permeabilitou. Cívka má 1200 závitů a je napájena proudem 4 A. Jak velká přítažná síla působí na kotvu?

Magnetický odpor jádra je zanedbatelný. Rozšíření průřezu magnetického pole ve vzduchové mezeře i rozptylové toky neuvažujte.

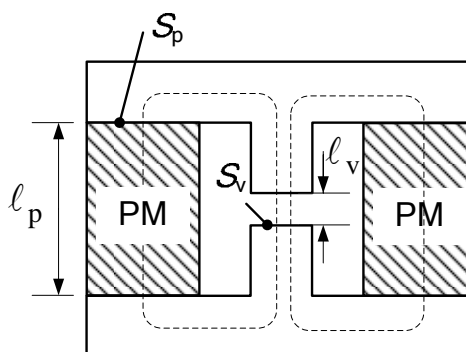


Výsledek: $F = 2011 \text{ N}$

Příklad 11.19

Mezi pólovými nástavci permanentního magnetu je vzduchová mezera délky ℓ_v a s plochou S_v . Určete potřebnou plochu S_p permanentního magnetu, má-li být magnetická indukce ve vzduchové mezeře při teplotě 20°C $B_v = 0,5 \text{ T}$. Magnetizační křivka použitého anizotropního feritu viz graf v příloze. Magnetický odpor pólových nástavců a rozptylové toky zanedbejte.

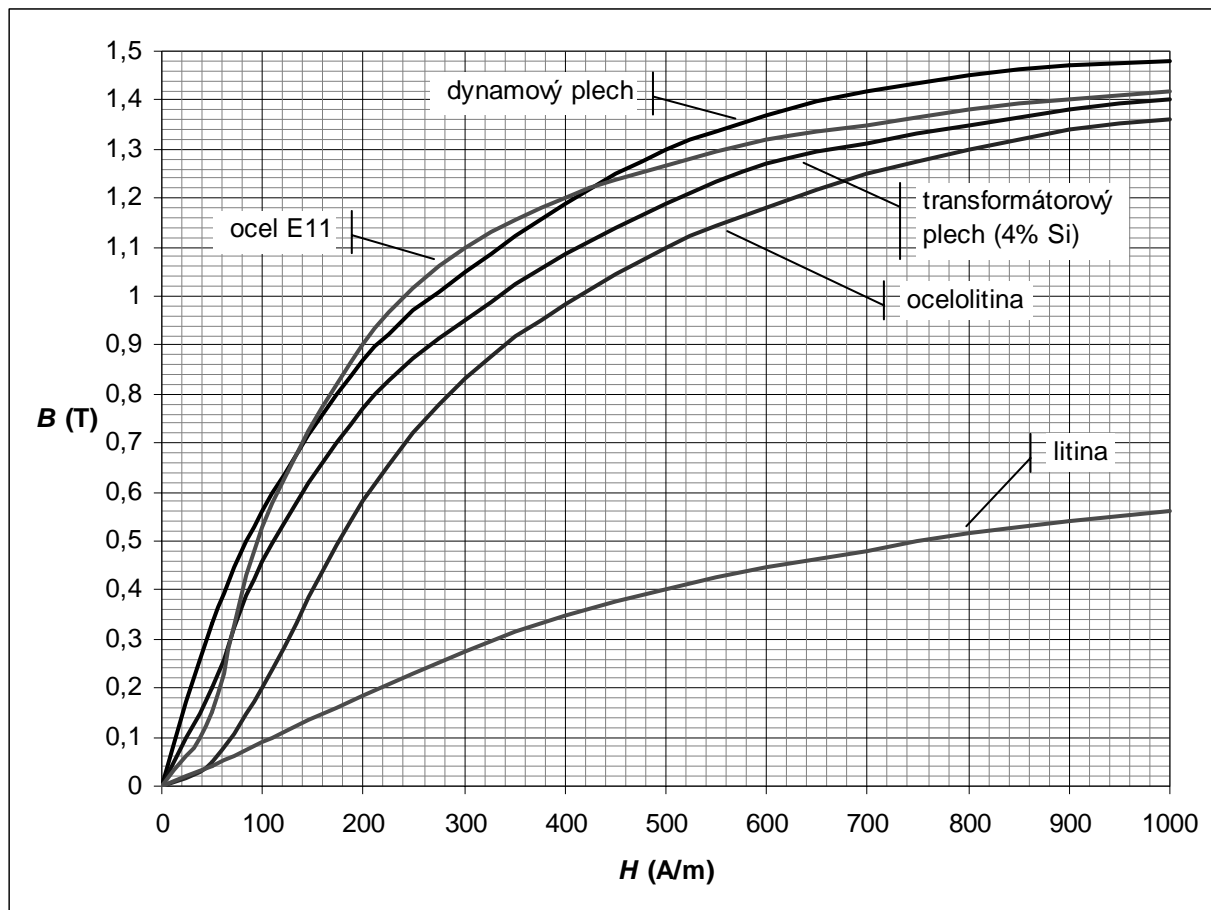
$$S_v = 3 \text{ cm}^2, \quad \ell_p = 20 \text{ mm}, \quad \ell_v = 4 \text{ mm}$$



Výsledek: $S_p = 3,125 \text{ cm}^2$, plocha každého ze dvou PM.

Příloha – BH charakteristiky

Magnetizační charakteristika některých měkkých feromagnetických materiálů



Magnetizační charakteristika tvrdého anizotropního feritu (permanentní magnet)

